

טורים

הקדמה ←

- טורים חיוביים
- טורים כלליים
- טורי חזקות
- טור טיילור וטור מקלורן

הקדמה

מהי סדרה?

למעשה סדרה היא משהו דומה מאוד לפונקציה, רק שהמשתנה של הפונקציה מקבל רק מספרים שלמים (1,2,3,4,5,...)

סימון מקובל: a_n הינו האיבר הכללי של הסדרה, לדוגמא: הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ היא הסדרה: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

מהו טור אינסופי?

טור אינסופי הוא סכום של אברי סדרה אינסופית. סימון מקובל: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, לדוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

מה המשמעות של התכנסות / התבדרות טור?

טור מתכנס הינו טור שסכומו שווה למספר סופי כלשהו, טור מתבדר הינו טור שסכומו מספר אינסופי

מה קורה כאשר האיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס?

במקרה שהאיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס, נוכל לקבוע מיד כי הטור מתבדר, לדוגמא: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ מתבדר בוודאות, לעומת זאת, כאשר הוא שואף לאפס, זה עדיין לא מספיק בכדי לקבוע התכנסות, לדוגמא: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ אמנם שואף לאפס אך הוא לא מתכנס

הקדמה

מתי מותר לחבר / לחסר טורים?

חיבור וחסור טורים (אריתמטיקת טורים) מותרת רק בטורים מתכנסים והטור המתקבל יורש את תכונת ההתכנסות

$$\sum(a_n - b_n) \quad , \quad \sum(a_n + b_n)$$

מהי התכנסות בתנאי ומהי התכנסות בהחלט?

כאשר טור הערכים המוחלטים של הטור הנתון מתכנס, אז הטור הנתון מתכנס בהחלט (וכמובן שהוא גם מתכנס), לעומת זאת, כאשר הטור הנתון מתכנס וטור הערכים המוחלטים מתבדר, אז הטור הנתון מתכנס בתנאי. (כמובן שאם הטור הנתון הוא טור חיובי, וגילינו כי הוא מתכנס, אז ברור שהוא גם מתכנס בהחלט, שהרי אם נבדוק את טור הערכים המוחלטים שלו הוא יתכנס)

כיצד מוכיחים התכנסות / התבדרות של טור?

הדרך הטריטוריאלית ביותר היא להראות שהטור גדול מטור מתבדר כלשהו כדי להוכיח התבדרות, או להראות שהטור קטן מטור מתכנס כלשהו כדי להוכיח התכנסות. בנוסף, יש מספר מבחני התכנסות שאפשר להשתמש בהם להוכחת התכנסות / התבדרות.

הקדמה

על איזה טורים אנו יודעים מתי הם מתכנסים או מתבדרים?

יש שני סוגי טורים חיוביים שאנו יודעים מתי הם מתכנסים או מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad \text{טור גיאומטרי -}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{טור הרמוני P -}$$

יש סוג נוסף של טור כללי (מחליף סימן) שאנו יודעים מתי הוא מתכנס או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \quad \text{טור הרמוני P מחליף סימן -}$$

מהו טור חזקות?

טור חזקות הינו טור שהאיבר הכללי מוכפל בקבוע כלשהו (x) בחזקת n : x^n

מהו טור טיילור? מהו טור מקלורן?

טורי טיילור ומקלורן הינם טורים אשר מציגים באופן מקורב התנהגות של פונקציה כלשהי בסמוך לנקודה כלשהי (טיילור) או בסמוך לנקודה 0 (מקלורן)