אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

סוג האינטגרל	**משמעות כאשר האינטגרנד:**		**הצגה כללית**
	$f=1$	**$f(x,y)$**	
כפול	שטח	נפח	$\iint_D f(x,y)\ dxdy$
משולש	נפח	מסה	$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$
קווי – סוג ראשון (f)	אורך	מסה	$\int_r f(x,y)\ ds$
משטחי – סוג ראשון (f)	שטח	מסה	$\iint_S f(x,y,z)\,ds$
קווי – סוג שני $(\underline{\mathbf{F}})$		עבודה (לאורך העקומה)	$\int_a^b F\left(\underset{(P)}{x},\underset{(Q)}{y},\underset{(R)}{z}\right)\bullet dr$
משטחי – סוג שני $(\underline{\mathbf{F}})$		שטף (על גבי / דרך המשטח)	$\iint_S \underline{F}\bullet\underline{n}\ ds$

אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

<u>פרמטריזציה</u>	
קו ישר בין שתי נקודות: $P_1(x_1,y_1)$ ו- $P_2(x_2,y_2)$	$l(t) = \big((t \cdot x_2 + (1-t) \cdot x_1) \;,\; (t \cdot y_2 + (1-t) \cdot y_1)\big) \quad \vert \quad 0 \le t \le 1$
עקומה הנתונה כפונקציה: $y = f(x)$	אפשר להגדיר את המשתנה x להיות t, ואז הצגה פרמטרית של העקומה תהיה: $C(t) = (t \;,\; f(t)) \quad \vert \quad a \le t \le b$
עקומה המונחת על עיגול / גליל / כדור	לרוב כדאי להציג את העקומה בקואורדינטות פולריות

אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

סימונים מקובלים	
פונקציית הצפיפות במרחב	$f(x,y,z)$
עקומה פרמטרית	$c(t)$ או $r(t)$
משטח בהצגה קרטזית	$S(x,y,z)$
משטח בהצגה פרמטרית	$\pi(s,t)$
היטל המשטח על אחד המישורים (לדוגמא מישור xy)	D

אינטגרל קווי – סוג ראשון		
עקומה $r(t)$	1. מציגים את העקומה בהצגה פרמטרית (כולל פענוח של נקודת ההתחלה ונקודת הסיום של העקומה, 2. גוזרים את העקומה לפי המשתנה שלה (לרוב לפי t), 3. מחשבים את הנורמה של הנגזרת של העקומה: $\Vert r'(t)\Vert = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ 4. אם פונקציית הצפיפות שונה מ-1, מחליפים את המשתנים שבפונקציית הצפיפות במשתנה הפרמטרי של העקומה, 5. מחשבים אינטגרל על המכפלה של פונקציית הצפיפות ונורמת הנגזרת	$\int_r f(x,y)\ ds = \int_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \Vert r'(t)\Vert dt$

אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל משטחי – סוג ראשון		
משטח מפורש: $z = S(x,y)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy), 2. גוזרים את המשטח המפורש לפי המשתנים של המישור שעליו הטלנו (לרוב: z_x , z_y), 3. מחשבים את הביטוי: $\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}$ 4. מחליפים את המשתנה z שמופיע בפונקציית הצפיפות ב- $z = S(x,y)$ 5. מחשבים אינטגרל כפול על מכפלת פונקציית הצפיפות בביטוי: $\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}$, עם גבולות ההיטל.	$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{D_{x,y}} f(x,y,S(x,y)) \cdot \sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}\,dxdy$
משטח סתום: $C = S(x,y,z)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy), 2. מחשבים את הגראדיינט של המשטח הסתום ומחלקים בנגזרת לפי המשתנה שאותו הטלנו (לרוב הנגזרת לפי z), 3. מחשבים את הנורמה של המנה: $\left\|\frac{\nabla S}{S_z}\right\|$ 4. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה של פונקציית הצפיפות בביטוי: $\left\|\frac{\nabla S}{S_z}\right\|$, עם גבולות ההיטל. 5. אם בסוף התהליך נשארים עם המשתנה z מבודדים אותו מפונקציית המשטח, ולהציב אותו כפונקציה של x ו-y.	$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{D_{x,y}} f(x,y,z) \cdot \left\|\frac{\nabla S}{S_z}\right\| dxdy$
משטח פרמטרי (בקואורדינטות פולריות): $\pi(r,\theta)$	1. מחשבים את גבולות המשתנים (זהו למעשה ה"היטל" של המשטח וישמש כתחום האינטגרציה), 2. גוזרים את המשטח לפי כל אחד מהמשתנים שלו, 3. מחשבים את הקרוס בין הנגזרות החלקיות של המשטח הפרמטרי: $\pi_s \times \pi_t$, 4. מחשבים את הנורמה של הקרוס: $\|\pi_s \times \pi_t\|$ (בפולרי: $\|\pi_r \times \pi_\theta\| = r$ בכדורי: $\|\pi_r \times \pi_\theta\| = r^2\sin(\varphi)$) 5. מחליפים את המשתנים אשר בפונקציית הצפיפות בביטוי שלהם לפי המשתנים הפרמטריים, 6. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה של פונקציית הצפיפות והנורמה של קרוס הנגזרות החלקיות ($\|\pi_s \times \pi_t\|$)	$\iint_\pi f(x,y,z)\,d\pi = \iint_{D_{r,\theta}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \cdot r\,drd\theta$
(בקואורדינטות כדוריות): $\pi(\varphi,\theta)$		$\iint_\pi f(x,y,z)\,d\pi = \iint_{D_{\varphi,\theta}} f(r\sin(\varphi)\cos(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\varphi)) \cdot r^2\sin(\varphi))\,d\varphi d\theta$
משטח פרמטרי: $\pi(s,t)$		$\iint_\pi f(x,y,z)\,d\pi = \iint_{D_{s,t}} f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \cdot \|\pi_s \times \pi_t\|\,dsdt$