טורים

- הקדמה
- טורים חיוביים
- טורים כלליים

⇐ טורי חזקות

- טור טיילור וטור מקלורן

טורי חזקות

<u>נתון טור חזקות ב- x</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, עלינו לקבוע את תחום ההתכנסות של הטור (כל ערכי x עבורם הטור מתכנס):

1. בודקים התכנסות בהחלט בעזרת מבחן המנה להתכנסות בהחלט כאשר x נעלם,
2. מחלצים את x מאי-השוויון $\rho < 1$
   (x מופיע בערך מוחלט, ולכן מקבלים שני איקסים – חיובי ושלילי, אשר בניהם נמצא תחום ההתכנסות),
3. עבור ערכי x בקצוות של תחום ההתכנסות בודקים באופן פרטני – מכניסים את הערכים בטור המקורי ובודקים התכנסות / התבדרות

<u>נתון טור חזקות ב- $x - x_0$</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, עלינו לקבוע את תחום ההתכנסות של הטור:

1. מסמנים: $y = x - x_0$
2. מבצעים את אותן הפעולות כמו בטור חזקות ב-x על הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$
3. מפענחים מהו תחום ההתכנסות של x מתוך המשוואה: $y = x - x_0$

טורי חזקות

<u>לדוגמא</u>: נתון הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)$ קבעו מהי הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

<u>א.</u> הטור מתכנס בהחלט בקטע $[-1,1]$

<u>ב.</u> תחום ההתכנסות הוא הקטע $[-1,1)$

<u>ג.</u> הטור מתבדר עבור $x=-1$

<u>ד.</u> הטור מתכנס בהחלט בקטע $(-1,1)$ ומתכנס בתנאי בקצוות $x=-1,1$

<u>פתרון</u>:

נתחיל בביצוע מבחן המנה להתכנסות בהחלט כאשר x הוא נעלם:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1+1}}{\frac{x^n}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+2}}{\frac{x^n}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)}{x^n(n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{x^n(n+1)}{x^n(n+2)}\right|=\lim_{n\to\infty}|x||1|<1$$

קיבלנו כי הטור מתכנס בהחלט עבור $|x|<1$ זאת אומרת כאשר: $-1<x<1$

כעת עלינו לבדוק את הקצוות על ידי בדיקה ישירה. נציב:

כאשר $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ

כאשר $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1^n}{n+1}\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ הטור גדול מטור הרמוני $P=1$ מתבדר, ולכן הוא מתבדר.

אם כן, הטור מתכנס בהחלט בתחום $-1<x<1$, מתכנס בתנאי ב- $x=-1$ ומתבדר ב- $x=1$

טענה ב' היא טענה הנכונה: הטור מתכנס בתחום: $-1\leq x<1$

טורי חזקות

<u>לדוגמא</u>: נתון הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-2)^n}{n+2}\right)$ קבעו מהי הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות:

<u>א.</u> הטור מתכנס בהחלט לכל x בקטע $[1,3]$

<u>ב.</u> תחום ההתכנסות הוא הקטע $[1,3)$

<u>ג.</u> הטור מתבדר עבור $x=1$

<u>ד.</u> הטור מתכנס בהחלטה בקטע $(1,3)$, ובקצוות, כאשר $x=1,3$ הטור מתכנס בתנאי

<u>פתרון</u>: נוח לסמן $y=x-2$, וכך המנה שלנו תהפוך ל: $\frac{y^n}{n+2}$ (למעשה אנחנו עוברים מטור חזקות ב- $x-x_0$ לטור חזקות ב- x).

נבצע את מבחן המנה להתכנסות בהחלט: $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{y^{n+1}}{n+1+2}}{\frac{y^n}{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y^{n+1}(n+2)}{y^n(n+3)}\right|=\lim_{n\to\infty}|y|\frac{n+2}{n+3}=|y|\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=|y|$

קיבלנו כי $\rho=|y|$ זאת אומרת, שלפי מבחן המנה להתכנסות בהחלט, הטור מתכנס בהחלט עבור: $|y|<1$, זאת אומרת, עבור: $-1<y<1$, זאת אומרת, עבור: $-1<x-2<1$, זאת אומרת, עבור: $1<x<3$.

כעת עלינו לבדוק את הקצוות באופן ישיר:

כאשר $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\right)$ הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ (חלק חיובי שואף לאפס ויורד).

כאשר $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ הטור גדול מטור הרמוני $P=1$ שהוא טור מתבדר ולכן הטור מתבדר.

לסיכום: הטור מתכנס בהחלט בקטע $1<x<3$, מתכנס בתנאי עבור $x=1$ ומתבדר עבור $x=3$

לכן תשובה ב' נכונה: תחום ההתכנסות הוא הקטע $[1,3)$