אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל	נוסחה	משמעות כאשר האינטגרנד: $\mathbf{f = 1}$	משמעות כאשר האינטגרנד: $\mathbf{f\ (x, y)}$
כפול	$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy$	שטח	נפח
משולש	$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{h(x,y)}^{p(x,y)} f(x,y)\,dz$	נפח	מסה

אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

<u>איך פותרים אינטגרל כפול או משולש?</u>

1. מחליטים האם האינטגרל קל / פתיר כפי שהוא או שיש צורך בהחלפת משתנים:

מתי נשתמש בהחלפת משתנים?

א. כאשר הביטוי באינטגרנד קשה או בלתי אפשרי לחישוב ואפשר להציג את המשתנים בתוכו כפונקציה של משתנים אחרים באופן שיָקֵל את תהליך החישוב,
ב. כאשר גבולות האינטגרציה מורכבים לחישוב ואפשר לבטא אותם כפונקציה של משתנים אחרים,

(ברוב התרגילים שדורשים החלפת משתנים, ההחלפה תועיל לנו גם בהפיכת האינטגרנד לפשוט יותר לחישוב, וגם בהפיכת הגבולות לפשוטים יותר, כך שכדאי תמיד להסתכל על שני הדברים האלו ולחפש את הרמזים להחלפה האידיאלית).

אם החלפנו משתנים, חייבים לכפול את האינטגרנד בערך המוחלט של היעקוביאן:

איך מוצאים את היעקוביאן?			
x ו-y מבוטאים במונחים של u ו-v : $J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$	u ו-v מבוטאים במונחים של x ו-y : $J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1}$	מעבר לקואורדינטות פולריות: $J=r$	מעבר לקואורדינטות כדוריות: $J=r^2\sin(\varphi)$ (φ הינה הזווית מציר z החיובי)

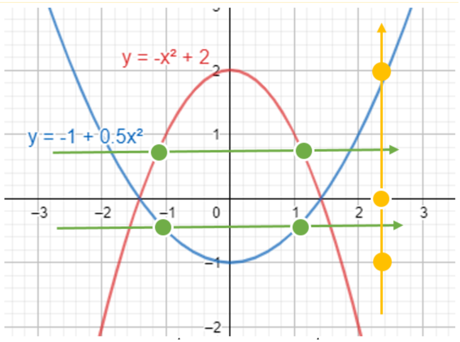
אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

2. בוחרים סדר אינטגרציה כאשר שמים לב לשלושת הדברים האלו:

א. היכולת לטגרל את האינטגרנד לפי המשתנים השונים. לדוגמא: האינטגרל $\int e^{x^2}\,dx$ לא פתיר, ולכן נהיה חייבים לנסות לבחור להתחיל לטגרל לפי משתנה אחר בתקווה שהביטוי הזה ייעלם.

ב. יש לוודא כי גבולות האינטגרל החיצוני ביותר (האחרון לטיגרול) הינו בעל גבולות קבועים (הגבולות של אינטגרלים פנימיים יכולים להיות פונקציה של אינטגרלים חיצוניים מהם).

ג. כדאי לנסות להגיע למצב שבו אנו מחשבים כמות מינימלית של אינטגרלים (יכול להיות שאם נבחר סדר אינטגרציה מסוים ניאלץ לחשב מספר אינטגרלים, ואם נבחר סדר אחר, יהיה עליו לחשב רק אינטגרל אחד) – שימו לב שלא תמיד אפשר לבחור בדרך הקצרה – זאת אומרת: לפעמים חייבים לחשב מספר אינטגרלים כי בסדר אינטגרציה שונה האינטגרל בכלל לא פתיר.

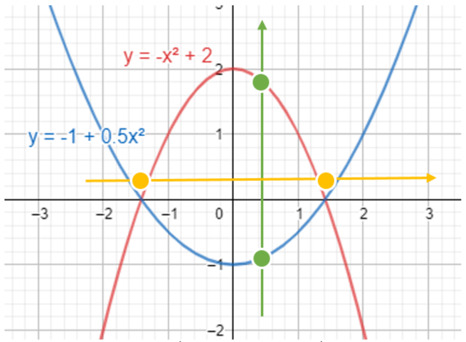


<u>סדר אינטגרציה</u>: קודם לפי x, אחר כך לפי y.

נקבל שני אינטגרלים כפולים ונצטרך לחבר את התוצאות. אחד עבור כניסה ויציאה בפרבולה המחייכת (מתחת לציר x), והשני עבור כניסה ויציאה בפרבולה הבוכה (מעל ציר x).

$$\int_{y=-1}^{y=0}\int_{x=-\sqrt{\frac{y+1}{0.5}}}^{x=\sqrt{\frac{y+1}{0.5}}} dxdy$$

$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{2-y}}^{x=\sqrt{2-y}} dxdy$$



<u>סדר אינטגרציה</u>: קודם לפי y, אחר כך לפי x.

נקבל אינטגרל כפול אחד. גבולות האינטגרל לפי y הינם: גבול תחתון – פרבולה מחייכת, גבול עליון – פרבולה בוכה. גבולות האינטגרל לפי x הינם נקודות המפגש בין הפרבולות, המתקבלות על ידי השוואה ביניהן:

$$2-x^2 = 0.5x^2-1 \quad \rightarrow$$

$$1.5x^2-3=0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

האינטגרל המבוקש הינו: $\int_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}}\int_{y=0.5x^2-1}^{y=2-x^2} dydx$

אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

ברוב התרגילים, נקבל נפח הכלוא בתוך גליל וחסום מלמטה ומלמעלה בין שני משטחים, לרוב נוכל להטיל את הנפח על מישור כלשהו (ברוב המקרים על מישור xy), ואז נציג את המשטחים החוסמים את הנפח מלמעלה ומלמטה באופן כזה: $z = f(x,y)$,

אם נסמן את היטל הנפח על המישור ב-D, נקבל את האינטגרל:

$$\iint_D dxdy \int_{z=h(x,y)}^{z=f(x,y)} dz = \iint_D dxdy\, [f(x,y) - h(x,y)]$$

שזהו בעצם אינטגרל כפול. בשלב זה לרוב נבצע המרה לקואורדינטות פולריות: נחליף את המשתנים לפיהם מטגרלים, נחליף את גבולות האינטגרציה, נחליף את הביטויים שיש בתוך האינטגרנד לפי: $x = r\cos(\theta)\ ,\ y = r\sin(\theta)$,

ולא נשכח לכפול את האינטגרנד ביעקוביאן!