אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

סימונים מקובלים	
פונקציה וקטורית (שדה כוחות) במרחב	$\underline{F}(P,Q,R)$
עקומה פרמטרית	$c(t)$ או $r(t)$
משטח בהצגה קרטזית	$S(x,y,z)$
משטח בהצגה פרמטרית	$\pi(s,t)$
היטל המשטח על אחד המישורים (לדוגמא מישור xy)	D

אינטגרלים של sin ו-cos מ-0 ועד 2π	
$\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = 0$	$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0$
$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$	$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$
$\int_0^{2\pi} \cos^3(x)\,dx = 0$	$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\,dx = 0$
$\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\pi$	$\int_0^{2\pi} \sin^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\pi$

אינטגרלים של sin ו-cos	
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$	$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$
$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx$	$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

<table>
<tr><th colspan="2">אינטגרל קווי – סוג שני</th></tr>
<tr><td rowspan="2">עקומה $r(t)$</td><td>1. מציגים את העקומה בהצגה פרמטרית (כולל פענוח של נקודת ההתחלה ונקודת הסיום של העקומה),
2. גוזרים את העקומה לפי המשתנה שלה (לרוב לפי t),
3. מחליפים את המשתנים שבפונקציית השדה במשתנה הפרמטרי של העקומה,
4. מחשבים אינטגרל על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה ווקטור הנגזרות של העקומה</td></tr>
<tr><td>$$\int_r \underline{F}\left(\underset{(P)}{x},\underset{(Q)}{y},\underset{(R)}{z}\right)\bullet dr=\int_a^b (P,Q,R)\bullet\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)dt=\int_a^b Pdx+Qdy+Rdz$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>משפט גרין – אינטגרל קווי במישור על עקומה סגורה</th></tr>
<tr><td>בהינתן מסילה סגורה במישור (או כזו שאפשר לסגור בקלות), אשר חוסמת בתוכה שטח D, ואשר כיוונה נגד כיוון השעון (אחרת יש לכפול במינוס 1), העבודה של שדה לאורכה שווה לאינטגרל כפול עם גבולות השטח החסום בתוכה על הביטוי: Q_x-P_y.
(במידה וסגרנו את התחום על ידי הוספת מסילה, יש להפחית את העבודה שהשדה עושה לאורכה!)
$$\oint_r \underline{F}\left(\underset{(P)}{x},\underset{(Q)}{y}\right)\bullet dr=\iint_{D_{x,y}} Q_x-P_y\,dxdy$$</td></tr>
<tr><td>שימו לב שאפשר להשתמש במשפט גרין כדי לחשב שטח. כיצד? נגדיר שדה להיות: $\underline{F}=(0,x)$ או: $\underline{F}=(-y,0)$
בכדי שכאשר נחשב Q_x-P_y נקבל 1, וכעת נוכל לחשב אינטגרל קווי עם השדה שהגדרנו והעקומה המקיפה את השטח אותו נרצה לחשב:
$$\iint_{D_{x,y}} Q_x-P_y\,dxdy=\oint_r \underline{F}\bullet dr$$</td></tr>
</table>

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל משטחי – סוג שני		
משטח מפורש: $z = S(x,y)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy) 2. גוזרים את המשטח המפורש לפי המשתנים של המישור שעליו הטלנו (לרוב: z_x , z_y) 3. מחליפים את המשתנה z שמופיע בפונקציית השדה ב- $z = S(x,y)$ 4. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה והוקטור: $\pm(S_x , S_y , -1)$ (בהתאם לנתוני התרגיל יש לבחור את הכיוון החיובי או השלילי של הוקטור), על גבולות ההיטל	$\iint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iint_{D_{x,y}} \underline{F} \bullet \pm(S_x , S_y , -1)dxdy$
משטח סתום: $C = S(x,y,z)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy) 2. מחשבים את הגראדיינט של המשטח הסתום ומחלקים בנגזרת לפי המשתנה שאותו הטלנו (לרוב הנגזרת לפי z) 3. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה והוקטור: $\pm\frac{\nabla G}{G_z}$ (בהתאם לנתוני התרגיל יש לבחור את הכיוון החיובי או השלילי של הוקטור) 4. אם בסוף התהליך נשארים עם המשתנה z אפשר לבודד אותו מפונקציית המשטח, ולהציג אותו כפונקציה של x ו-y)	$\iint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iint_{D_{x,y}} \underline{F} \bullet \pm\frac{\nabla G}{G_z} dxdy$
משטח פרמטרי: $\pi(s,t)$	1. מחשבים את גבולות המשתנים (זהו למעשה ה"היטל" של המשטח וישמש כתחום האינטגרציה 2. גוזרים את המשטח לפי כל אחד מהמשתנים שלו 3. מחשבים את הקרוס בין הנגזרות החלקיות של המשטח הפרמטרי: $\pi_s \times \pi_t$ 4. מחליפים את המשתנים אשר בפונקציית השדה בביטוי שלהם לפי המשתנים הפרמטריים 5. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה והוקטור: $(\pi_s \times \pi_t)$ עם גבולות המשתנים	$\iint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iint_{D_{s,t}} \underline{F} \bullet (\pi_s \times \pi_t)dsdt$

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

משפט גאוס (דיברגנץ) – אינטגרל משטחי במרחב על משטח סגור
בהינתן משטח סגור S במרחב הכולא בתוכו נפח כלשהו V (או משטח שאפשר לסגור בקלות) אשר שדה הכוחות הנתון בתרגיל מוגדר בכל תחומו (גם המעטפת וגם הנפח): השטף של השדה על המשטח (כאשר הנורמל למשטח פונה החוצה! אם הוא פונה פנימה יש לכפול במינוס 1), שווה לאינטגרל משולש על דיברגנץ השדה עם גבולות הנפח הכלוא. במידה וסגרנו את הנפח על ידי הוספת משטח כלשהו, יש להפחית את השטף העובר דרך המשטח שהוספנו. $$\oiint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iiint_V div(\underline{F})dxdydz$$
כיצד מחשבים את דיברגנץ השדה? נתונה פונקציה וקטורית: $\underline{F}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, הדיברגנץ שלה הינו: $div(\underline{F}) = P_x + Q_y + R_z$ (התוצאה הינה סקלר)

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

משפט סטוקס (רוטור) – אינטגרל קווי במרחב על עקומה סגורה
בהינתן משטח כלשהו במרחב π אשר שפתו הינה עקומה (סגורה) r: העבודה של פונקציה וקטורית $\underline{F}$ לאורך העקומה שווה לשטף של ה-curl של השדה $\underline{F}$ מוכפל בנורמל המשטח (חישוב כאינטגרל משטחי סוג ראשון – שהרי המכפלה הסקלרית curl(F) · n הופכת לפונקציה סקלרית) (כיוון הנורמל לפי כלל יד ימין – אצבע לכיוון העקומה, אמה לכיוון המשטח, אגודל לכיוון הנורמל). אם אחד המשתנים במשוואת העקומה שווה ל-0 (לדוגמא אם העקומה מונחת על מישור xy, אז z=0) אפשר להפוך את המשתנה הזה ל-0 גם בפונקציה הוקטורית. $$\oint_r \underline{F} \bullet dr = \iint_\pi curl(\underline{F}) \bullet \underline{n}\, ds$$
כיצד מחשבים את הרוטור של השדה? נתונה פונקציה וקטורית: $\underline{F}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, הרוטור שלה הינו: $curl(\underline{F}) = \left((R_y - Q_z)\ ,\ (P_z - R_x)\ ,\ (Q_x - P_y)\right)$ (התוצאה וקטור) (כאשר השדה משמר, כל רכיבי הרוטור חייבים לצאת 0!)