טורים – דף נוסחאות למבחן

תנאי הכרחי (אך לא מספיק) להתכנסות של טור – האיבר הכללי שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף
אריתמטיקת טורים – אך ורק בטורים **<u>מתכנסים</u>** (מוריש את תכונת ההתכנסות הלאה) (אפשר להשתמש בהוכחה על דרך השלילה להתכנסות): $\sum(a_n+b_n)$, $\sum(a_n-b_n)$, $\sum(a_n\times\alpha)$

טורים חיוביים

טור גיאומטרי	$\sum_{n=a}^{\infty} q^n \begin{cases} -1<q<1 & \rightarrow \text{מתכנס} = \frac{1}{1-q} \\ q\geq 1 \ or \ q\leq -1 & \rightarrow \text{מתבדר} \end{cases}$	$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$
טור הרמוני P	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} 0<p\leq 1 & \rightarrow \text{מתבדר} \\ p>1 & \rightarrow \text{מתכנס} \end{cases}$	
מבחן המנה	<u>נתון טור חיובי:</u> $\sum A_n$, נגדיר: $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}$ אם $\rho=1$ המבחן לא עובד, אם $\rho>1$ הטור מתבדר, אם $\rho<1$ הטור מתכנס	
מבחן ההשוואה הקלאסי	<u>נתון טור חיובי:</u> $\sum A_n$, נמצא טור גדול יותר שמתכנס כדי להוכיח התכנסות, וקטן יותר שמתבדר כדי להוכיח התבדרות	
מבחן ההשוואה הגבולי	<u>נתון טור חיובי:</u> $\sum A_n$, נגדיר טור בוחן חיובי: $\sum B_n$ כעת נבדוק: $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ אם ρ יוצא מספר ממשי חיובי, אזי הטורים $\sum A_n$, ו $\sum B_n$ מאותו הסוג (או מתבדרים או מתכנסים)	
מבחן האינטגרל	<u>נתון טור חיובי:</u> $\sum A_n$, נגדיר פונקציית עזר $f(x)=A_n$, נבדוק אם הפונקציה **רציפה** ו**יורדת** בכל התחום של הטור, אם כן, נוכל להשתמש במבחן ולבדוק האם האינטגרל של פונקציית העזר מתכנס או מתבדר	

טורים כלליים

טור הרמוני P מחליף סימן	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ | $p>0$ $\rightarrow$ מתכנס
מבחן לייבניץ להתכנסות	1. החלק החיובי של האיבר הכללי שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף 2. החלק החיובי של האיבר הכללי מתחיל לרדת מ-n מסוים
טור ערכים מוחלטים	אם טור הערכים המוחלטים מתכנס, הטור המקורי "מתכנס בהחלט". אם הטור המקורי מתכנס וטור הערכים המוחלטים מתבדר, הטור המקורי "מתכנס בתנאי".
מבחן המנה להתכנסות בהחלט	<u>נתון טור:</u> $\sum A_n$, נגדיר: $\rho=\lim_{n\to\infty}\left\vert\frac{A_{n+1}}{A_n}\right\vert$, אם $\rho=1$ המבחן לא עובד, אם $\rho>1$ הטור מתבדר, אם $\rho<1$ הטור מתכנס בהחלט

<u>טור חזקות ב-x</u> - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ - תחום ההתכנסות – כל ערכי x עבורם הטור מתכנס

1. בודקים התכנסות בהחלט בעזרת מבחן המנה להתכנסות בהחלט כאשר x נעלם,
2. מחלצים את x מאי-השוויון $\rho<1$ (x מופיע בערך מוחלט, ולכן מקבלים שני איקסים – חיובי ושלילי, אשר בניהם נמצא תחום ההתכנסות),
3. עבור ערכי x בקצוות של תחום ההתכנסות בודקים באופן פרטני – מכניסים את הערכים בטור המקורי ובודקים התכנסות / התבדרות

<u>טור חזקות ב$x-x_0$</u> - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$

טורים – דף נוסחאות למבחן

	טור	פיתוח	תחום ההתכנסות
נוסחה כללית	פולינום מקלורן $(x_0 = 0)$	$p(x)_n = f(x_0) + \frac{f(x_0)' \cdot x^1}{1!} + \frac{f(x_0)'' \cdot x^2}{2!} + \frac{f(x_0)''' \cdot x^3}{3!} + \cdots + \frac{f(x_0)^{(n)} \cdot x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_0)^{(k)} \cdot x^k}{k!}$	
	פולינום טיילור	$p(x)_n = f(x_0) + \frac{f(x_0)' \cdot (x-x_0)^1}{1!} + \frac{f(x_0)'' \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \frac{f(x_0)''' \cdot (x-x_0)^3}{3!} + \cdots + \frac{f(x_0)^{(n)} \cdot (x-x_0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_0)^{(k)} \cdot (x-x_0)^k}{k!}$	
פיתוחים ידועים	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$-1 < \mathbf{x} < 1$
	e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$-\infty < \mathbf{x} < \infty$
	e^{-x}	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(-1)^k = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$	$-\infty < \mathbf{x} < \infty$
	$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$-\infty < \mathbf{x} < \infty$
	$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < \mathbf{x} < \infty$
	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}(-1)^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < \mathbf{x} \le 1$
	$tan^{-1}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}(-1)^k = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$	$-1 \le \mathbf{x} \le 1$

- ברוב מוחלט של התרגילים אפשר להשתמש בפיתוחים ידועים. לפעמים נדרש לעשות מעט מניפולציות

(לדוגמא: לכפול את x בקבוע כלשהו, או אם יש ביטוי כזה: $\frac{1}{a-x}$ אפשר להמיר אותו לביטוי הזה: $\frac{1}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ שזה למעשה שווה לביטוי הזה: $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ ולפי זה נוכל לכפול את כל הטור ב- $\frac{1}{a}$ ולהשתמש בפיתוח של $\frac{1}{1-x}$ כאשר $x = \frac{x}{a}$)