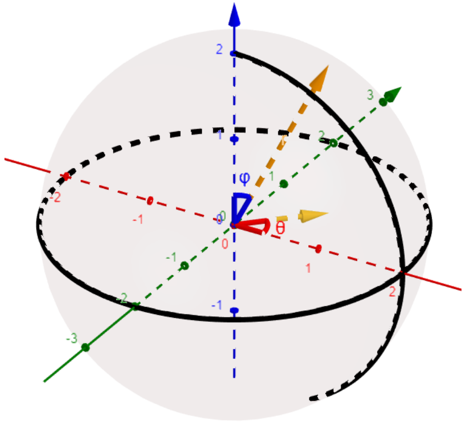
המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

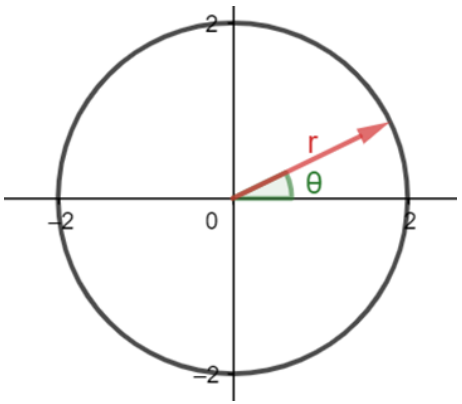
מקרטזי לפולרי			
$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$	$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$	כאשר הנקודה נמצאת על ציר y (זאת אומרת: $x = 0$) הפונקציה tan^{-1} לא מוגדרת. כאשר הנקודה נמצאת מחוץ לרביע הראשון, יש לתקן את הזווית המתקבלת על ידי מציאת הזווית "מראה" של הזווית שהתקבלה. (לדוגמא הנקודה (-1,-1) תיתן זווית של $\frac{1}{4}\pi$, אך באמת הזווית היא: $\frac{5}{4}\pi$).
$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$	$r = \frac{x}{\cos(\theta)}$	$r = \frac{y}{\sin(\theta)}$	

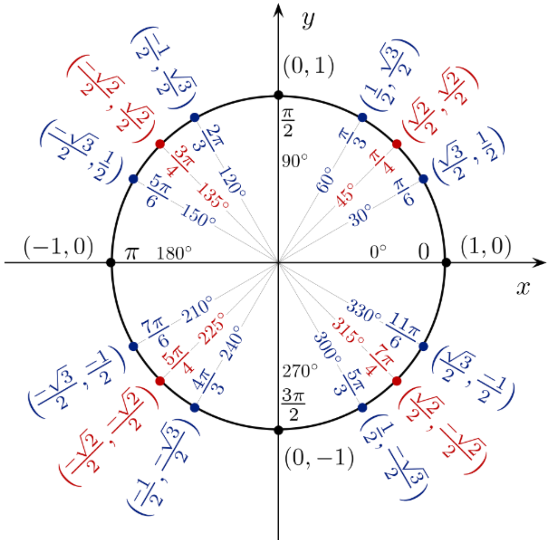
מפולרי לקרטזי	
$x = r \cdot \cos(\theta)$	מציאת ערכי x ו-y על ידי שימוש ברדיוס וזווית
$y = r \cdot \sin(\theta)$	

מקרטזי לכדורי		
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	θ - הזווית שבין היטל r על מישור xy וציר x	$\theta \in [0,2\pi]$
$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$	φ - הזווית של r מציר z	$\varphi \in [0,\pi]$
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	r - המרחק שבין ראשית הצירים לנקודה	$r \geq 0$

מכדורי לקרטזי	
$x = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta)$	מציאת ערכי x, y ו- z על ידי שימוש ברדיוס ובזוויות
$y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta)$	
$z = r \cdot \cos(\varphi)$	







המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

חוקים		
משימה	**הצגה קרטזית**	**הצגה פולרית**
הזזת מרכז הגוף לנקודה (x_0, y_0, z_0)	**<u>מחסרים</u>** את רכיבי הנקודה מהמשתנים של פונקציית הגוף בהתאמה (לדוגמא: $(x-x_0)^2$)	**<u>מוסיפים</u>** את רכיבי הנקודה לרכיבי הפונקציה בהתאמה (לדוגמא: $r \cdot cos(\theta) + x_0$)
כיווץ עיגול לכדי אליפסה כך שהרדיוס בכיוון ציר x הוא r_x, ובכיוון ציר y הוא r_y	**<u>מחלקים</u>** את משתני הפונקציה בהתאמה (לדוגמא: $\frac{x^2}{{r_x}^2}$)	**<u>מכפילים</u>** כל רכיב של הפונקציה ביחס של הכיוון שלה בהתאמה (לדוגמא: $r_x \cdot \cos(\theta)$)

גופים דו מימדיים נפוצים		
גוף	**הצגה קרטזית**	**הצגה פולרית**
עיגול שמרכזו ב- $(0,0)$	$x^2 + y^2 = r^2$	$0 \le \theta \le 2\pi$ $l(\theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$
עיגול שמרכזו ב- (x_0, y_0)	$(x-x_0)^2 + (y-x_0)^2 = r^2$	$0 \le \theta \le 2\pi$ $l(\theta) = (r \cdot cos(\theta) + x_0, r \cdot sin(\theta) + y_0)$
אליפסה שמרכזה ב - $(0,0)$, רדיוסה בכיוון ציר x הוא r_x, ובכיוון ציר y הוא r_y	$\frac{x^2}{{r_x}^2} + \frac{y^2}{{r_y}^2} = 1$	$0 \le \theta \le 2\pi$ $l(\theta) = \left(r_x \cdot \cos(\theta), r_y \cdot \sin(\theta)\right)$
אליפסה שמרכזה בנקודה (x_0, y_0), רדיוסה בכיוון ציר x הוא r_x, ובכיוון ציר y הוא r_y	$\frac{(x-x_0)^2}{{r_x}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{{r_y}^2} = 1$	$0 \le \theta \le 2\pi$ $l(\theta) = \left(r_x \cdot \cos(\theta) + x_0, r_y \cdot \sin(\theta) + y_0\right)$

המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

גופים תלת ממדיים נפוצים					
גוף	מרכז	הצגה קרטזית		הצגה פולרית / כדורית / גלילית	
גליל (מקביל לציר z)	$(0,0)$	$x^2+y^2=r^2$		$0\le\theta\le2\pi$ $-\infty\le h\le\infty$	$\pi(h,\theta)=(R\cdot\cos\theta\,,R\cdot\sin\theta\,,h)$
כדור	$(0,0,0)$	$x^2+y^2+z^2=r^2$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=(r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta),r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta),r\cdot\cos(\varphi))$
כדור	(x_0,y_0,z_0)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=(r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)+x_0\,,r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)+y_0\,,r\cdot\cos(\varphi)+z_0)$
אליפסואיד	$(0,0,0)$	$\frac{x^2}{{r_x}^2}+\frac{y^2}{{r_y}^2}+\frac{z^2}{{r_z}^2}=1$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=\left(r_x\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)\ ,r_y\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)\ ,r_z\cdot\cos(\varphi)\right)$
אליפסואיד	(x_0,y_0,z_0)	$\frac{(x-x_0)^2}{{r_x}^2}+\frac{(y-y_0)^2}{{r_y}^2}+\frac{(z-z_0)^2}{{r_z}^2}=1$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=\left(r_x\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)+x_0\,,r_y\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)+y_0\,,r_z\cdot\cos(\varphi)+z_0\right)$
פרבולואיד עליון	$(0,0,0)$	$x^2+y^2-z=0$	$z=x^2+y^2$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta\,,r\cdot\sin\theta\,,r^2)$
פרבולואיד תחתון	$(0,0,0)$	$x^2+y^2+z=0$	$z=-x^2-y^2$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta\,,r\cdot\sin\theta\,,-r^2)$
פרבולואיד עליון	(x_0,y_0,z_0)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-z+z_0=0$	$z=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta+x_0\,,r\cdot\sin\theta+y_0\,,r^2+z_0)$
פרבולואיד אליפטי עליון	$(0,0,0)$	$\frac{x^2}{{r_x}^2}+\frac{y^2}{{r_y}^2}-z=0$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r_x\cdot r\cdot\cos\theta\,,r_y\cdot r\cdot\sin\theta\,,r^2)$
חרוט*	$(0,0,0)$	$x^2+y^2-z^2=0$	$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta\,,r\cdot\sin\theta\,,\pm r)$

* כדי להציג רק את חלקו העליון (שמעל מישור xy) או את חלקו התחתון (שמתחת למישור xy), נשתמש בהצגה מפורשת ונבחר את סימן הפלוס שלפני השורש לחרוט עליון, או את סימן המינוס לחרוט תחתון. בקואורדינטות פולריות, נבחר את הסימן שלפני רכיב ה-z בהתאם לנדרש (חרוט עליון – סימן פלוס, תחתון – סימן מינוס)

המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

<u>נוסחאות שונות לעקומות פרמטריות - שטחים, אורכים, מרחקים</u>

שטח הכלוא בין שתי זוויות (θ_1 , θ_2) היוצאות מראשית הצירים ועקומה פולרית המיוצגת על ידי r:

$$Area = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta$$

הדרך בין נקודות במרחב על עקומה וקטורית – אורך קשת (אינטגרל של המהירות):

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = \int_a^b \left\|\frac{dr}{dt}\right\| dt$$

(חשוב לזכור כי: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$)

מרחק בין 2 נקודות במרחב:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

טריגונומטריה

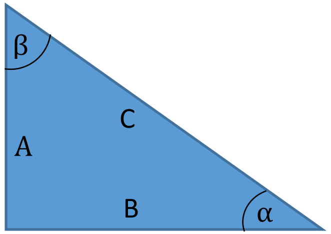
זוויות במשולש ישר זווית

$\frac{A}{C} = \sin(\alpha) \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{A}{C}\right) = \alpha$

$\frac{B}{C} = \cos(\alpha) \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{B}{C}\right) = \alpha$

$\frac{B}{C} = \sin(\beta) \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{B}{C}\right) = \beta$

$\frac{A}{C} = \cos(\beta) \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{A}{C}\right) = \beta$



$\frac{A}{B} = \tan(\alpha) \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \alpha$

$\frac{B}{A} = \tan(\beta) \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \beta$

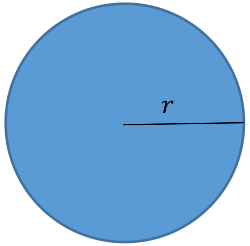
משפט הקוסינוסים:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

(α – הזווית שבין a ו-b)

גופים פשוטים במישור

עיגול

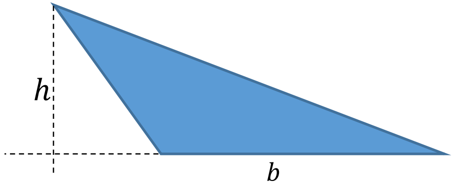


שטח: $A = \pi r^2$

היקף: $C = 2\pi r$

שטח של אליפסה מהצורה $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = r^2$: $A = \pi ab$

משולש

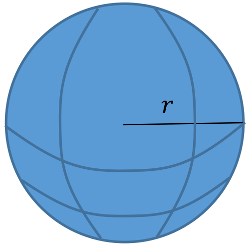


שטח: $A = \frac{1}{2}bh$

שטח משולש שווה צלעות: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

גופים פשוטים במרחב

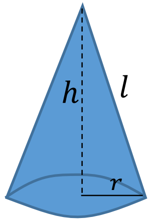
כדור



נפח: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

שטח מעטפת: $S = 4\pi r^2$

חרוט



נפח: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

שטח מעטפת: $S = \pi rl$