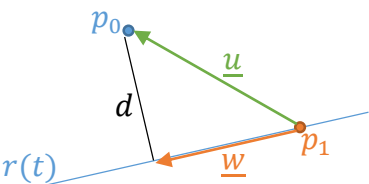


# ישרים ומישורים במרחב – דף נוסחאות למבחן

| ישרים במרחב                |                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>מצבים בין שני ישרים</b> | מקבילים          | <p>לשני הישרים אותו כיוון – מציגים את משוואות הישרים בצורה של נקודה וכיוון ובודקים האם כיוון של ישר אחד הוא מכפלה של כיוון הישר השני.</p> <p>לישרים כיוונים שונים וצריך לבדוק האם יש להם נק' משותפת – אם כן הם נחתכים, אם לא הם מצטלבים.</p> <p>מסמנים כל ישר עם משתנה אחר, לדוגמא <math>s</math> ו-<math>t</math>, ומציגים כל רכיב של הישרים בנפרד: <math>(x_0 + tv_1), (y_0 + tv_2), (z_0 + tv_3)</math> , <math>(x_0 + sv_1), (y_0 + sv_2), (z_0 + sv_3)</math></p> <p>משווים בין רכיבי <math>x</math> ו-<math>y</math> של הנקודות: <math>x_0 + sv_1 = x_0 + tv_1</math> , <math>y_0 + sv_2 = y_0 + tv_2</math> , ומחשבים את <math>s</math> ו-<math>t</math> משתי המשוואות, בונים משוואה שלישית באמצעות השוואה בין רכיבי <math>z</math>: <math>z_0 + sv_3 = z_0 + tv_3</math> ,</p> <p>מציבים את משוואה האחרונה, אם היא מתקיימת - הישרים נחתכים, ואם לא - מצטלבים</p> |
|                            | מצטלבים / נחתכים |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

| משימה                                                                                                                                                                             | איך עושים?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>הצגה פרמטרית באמצעות נקודה <math>p_0(x_0, y_0, z_0)</math> וכיוון <math>\underline{t} = (v_1, v_2, v_3)</math></p> <p>מציאת כיוון של ישר באמצעות 2 נקודות המקיימות את הישר</p> | <p><math>\underline{r}(t) = p_0 + t\underline{v} = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) = ((x_0 + tv_1), (y_0 + tv_2), (z_0 + tv_3))</math></p> <p>מחסרים את רכיבי אחת הנקודות מרכיבי הנקודה השנייה: <math>\underline{v} = p_1 - p_2 = (x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <p>מרחק בין נקודה במרחב לישר <math>\underline{r}(t)</math></p>                                                                                                                    | <p>1. בחירת נקודה אקראית על הישר <math>p_1(x_1, y_1, z_1)</math></p> <p>2. חישוב הוקטור היוצא מהנקודה האקראית אל הנקודה הנתונה: <math>\underline{u} = p_0 - p_1</math></p> <p>3. הצגת כיוון הישר כוקטור: <math>\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)</math></p> <p>4. חישוב היטל הוקטור שבין שתי הנקודות על וקטור הישר: <math>\underline{w} = \underline{v} \cdot \frac{\underline{v} \cdot \underline{u}}{\underline{v} \cdot \underline{v}}</math></p> <p>5. חישוב הגדלים של שני הוקטורים שחישבנו בשלבים 2 ו-4: <math>\ \underline{u}\ , \ \underline{w}\ </math></p> <p>6. חישוב אורך הניצב האחרון במשולש ישר הזווית שנוצר באמצעות משפט פיתגורס: <math>d = \sqrt{\ \underline{u}\ ^2 - \ \underline{w}\ ^2}</math> (זהו המרחק הנדרש)</p>  |
| מרחק בין שני ישרים מקבילים                                                                                                                                                        | <p>בחירת נקודה אקראית על אחד הישרים וחישוב המרחק שלה מהישר השני</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| מרחק בין שני ישרים מצטלבים                                                                                                                                                        | <p>1. חישוב מכפלה וקטורית בין כיווני הישרים</p> <p>2. מציאת שני מישורים המכילים את הישרים ומקבילים זה לזה (עבור כל מישור משתמשים במכפלה הוקטורית כנורמל ונקודה על הישר)</p> <p>3. חישוב המרחק בין המישורים</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p>מעבר מהצגה כ"ישר החיתוך" בין שני מישורים להצגה פרמטרית</p>                                                                                                                     | <p>שיטה 1</p> <p>1. מציאת נורמלים לשני המישורים (המקדמים של <math>x, y, z</math> במשוואות המישורים או כפל וקטורי בין כיווני המישור בהצגה פרמטרית של המישורים),</p> <p>2. חישוב מכפלה ווקטורית (קרוס) לשני הנורמלים ושימוש בכיוון של התוצאה ככיוון הישר המבוקש,</p> <p>3. מציאת נקודה כלשהי על הישר (נקודה המקיימת את שתי משוואות המישורים),</p> <p>4. הצגת הישר המבוקש באמצעות נקודה וכיוון.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                                                   | <p>שיטה 2</p> <p>1. חיסור / חיבור שתי משוואות המישורים תוך ניסיון "להיפטר" מאחד הנעלמים,</p> <p>2. בחירת 2 נקודות שרירותיות והצבתן במשוואה שהתקבלה,</p> <p>3. הצבת הערכים שהתקבלו באחת המשוואות המקוריות ומציאת הערך השלישי בשתי הנקודות השרירותיות,</p> <p>4. בניית ישר החיתוך ע"י חיסור הנקודות אחת מהשנייה עבור כיוון הישר, ושימוש באחת הנקודות השרירותיות עבור הנקודה.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

# ישרים ומישורים במרחב – דף נוסחאות למבחן

| מישורים במרחב                |                |                                                                                                                              |
|------------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>מצבים בין שני מישורים</u> | <u>מקבילים</u> | לשני המישורים אותו כיוון (ולכן הם לא נחתכים) – נורמלי שני המישורים צריכים להיות באותו הכיוון (עד כדי כפל בקבוע)              |
|                              | <u>נחתכים</u>  | נורמלי המישורים בעלי כיוון שונה – המישורים נחתכים והקו שבו הם נחתכים נקרא "ישר החיתוך" – השיטות למציאתו בעמוד על ישרים במרחב |

| משימה                                                                                                                                                        | איך עושים?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| מציאת משוואת מישור באמצעות נקודה על המישור $p(x_0, y_0, z_0)$ ונורמל למישור (הכיוון שניצב לכיוון המישור): $\underline{n} = (a, b, c)$                        | $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| הצגה פרמטרית באמצעות שני כיוונים המקיימים את המישור $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , ונקודה במישור $p(x_0, y_0, z_0)$ | $\pi: (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| מציאת משוואת מישור בהינתן 3 נקודות $(A, B, C)$                                                                                                               | 1. חישוב שני וקטורים היוצאים מאותה נקודה באמצעות חיסור רכיבי הנקודות (לדוגמא: $\underline{AB} = B - A$ וגם: $\underline{AC} = C - A$ )<br>2. חישוב הנורמל למישור באמצעות מכפלה ווקטורית (קרוס) בין הוקטורים: $\underline{N} = \underline{AB} \times \underline{AC} = (a, b, c)$<br>3. בחירת אחת הנקודות $(x_0, y_0, z_0)$ הנתונות בתרגיל, ושימוש ברכיבי הנורמל $(a, b, c)$ במשוואה למציאת מישור: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$                                                                                                                                    |
| מעבר ממשוואת מישור להצגה פרמטרית                                                                                                                             | 1. מציאת 3 נקודות $(A, B, C)$ המקיימות את משוואת המישור: בחירת שני רכיבים שרירותיים של הנקודה (למשל X ו-Y), הצבתם במשוואת המישור וחישוב הרכיב השלישי של הנקודה (חוזרים על התהליך 3 פעמים למציאת שלושת הנקודות)<br>2. חישוב 2 וקטורים המונחים במישור ע"י החסרת רכיבי שתי נקודות מהנקודה השלישית: $\underline{AB} = B - A$ וגם: $\underline{AC} = C - A$<br>3. שימוש באחת הנקודות שמצאנו בשלב 1, ובשני הוקטורים להצגה פרמטרית של מישור:<br>$\pi: (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3)$<br>(אפשר להכפיל או לחלק את הוקטורים בקבוע לצורך קבלת מספרים "יפים" יותר) |
| מעבר מהצגה פרמטרית למשוואת מישור                                                                                                                             | 1. הכפלת וקטורי הכיוון במכפלה וקטורית: $\underline{v} \times \underline{w}$ למציאת נורמל המישור<br>2. שימוש בנקודה הנתונה בהצגה הפרמטרית וברכיבי הנורמל לחישוב משוואת המישור                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| מציאת מרחק נקודה $p(x_0, y_0, z_0)$ ממישור $ax + by + cz + d = 0$                                                                                            | $d_{point \rightarrow plain} = \frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (יש לשים לב שמשוואת המישור נתונה בצורה הרשומה כאן, אם $d$ באגף השני, יש לשנות את סימנו בנוסחא)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| מציאת מרחק בין שני מישורים מקבילים                                                                                                                           | $d_{plain \rightarrow plain} = \frac{ d_1 - d_2 }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (אם המקדמים $a, b, c$ של שני המישורים לא שווים בדיוק, כופלים את אחד המישורים בסקלר כלשהו בכדי להשוותם)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| מציאת מישור משיק לפונקציה כלשהי $f(x, y, z)$ בנקודה נתונה $p(x_0, y_0, z_0)$                                                                                 | 1. גזירת הפונקציה לפי כל המשתנים שלה: $f_x, f_y, f_z$<br>2. הצבת הנקודה הנתונה בנגזרות החלקיות לחישוב הנורמל לפונקציה בנקודה<br>3. שימוש בנקודה וברכיבי הנורמל במשוואה למציאת מישור: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |