

ישרים ומישורים במרחב

שאלות ממבחנים

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 1

מישור מכיל את ישר החיתוך $L = \begin{cases} \pi_{1a}: z - x = -1 \\ \pi_{1b}: 3x - y - 5z = 0 \end{cases}$ והוא ניצב למישור: $\pi_2: x + y - 2z = 1$

א. מצאו את המישור

ב. מצאו את מרחק הישר $l(t) = (1 + 2t, 2 - t, 2 - t)$ מהמישור שמצאתם בסעיף א' ומהמישור π_2

תשובה 1

סעיף א:

לצורך מציאת משוואת מישור, עלינו למצוא את הכיוון למישור (נורמל) ולמצוא איזושהי נקודה המקיימת את המישור. המישור המבוקש ניצב למישור π_2 ולכן הנורמל של המישור π_2 מקביל למישור המבוקש. הנורמל של π_2 : $(1, 1, -2)$

הכיוון של ישר החיתוך נתון על ידי מכפלה וקטורית של נורמלי המישורים הנחתכים:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \underline{i}(\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}), -\underline{j}((\underline{\hspace{1cm}}) \cdot (\underline{\hspace{1cm}}) - \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}), \underline{k}((\underline{\hspace{1cm}}) \cdot (\underline{\hspace{1cm}}) - \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}) = (1, -2, 1)$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

מכיוון שהמישור המבוקש מכיל את ישר החיתוך, והוא מקביל גם לנורמל של π_2 ושני כיוונים אלו שונים זה מזה, נוכל לכפול אותם מכפלה וקטורית ולקבל את הנורמל למישור המבוקש:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \underline{i}((-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1), -\underline{j}(1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1), \underline{k}(1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) = (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}) \rightarrow (1, 1, 1)$$

נמצא נקודה על המישור על ידי המשוואות של ישר החיתוך: נקבע את $x = 0$ ונציב במשוואה הראשונה:

$$z - 0 = -1 \rightarrow z = -\underline{\quad}$$

$$3 \cdot (0) - y - 5 \cdot (-1) = 0 \rightarrow y = \underline{\quad} \quad \text{נציב במשוואה השניה ונקבל את } y:$$

נציב את הנקודה $(0, 5, -1)$ ואת הכיוון $(1, 1, 1)$ במשוואת המישור:

$$1(x - 0) + 1(y + 1) + 1(z - 5) = 0 \rightarrow \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

סעיף ב:

בכדי למצוא מרחק של ישר ממישור, ראשית עלינו להוכיח כי הישר והמישור זה לזה, שאם לא כך, הרי שהמרחק בניהם יהיה שווה 0, שכן הם ייחתכו באיזושהי נקודה. במידה והישר והמישור מקבילים, נוכל לבחור כל נקודה על הישר ולחשב את מרחקה מהמישור באמצעות נוסחה פשוטה.

$$l(t) = (1, 2, 2) + t(2, -1, -1) \quad \text{נציג את הישר הנתון בצורה כזו שיהיה קל לראות את הכיוון שלו:}$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

נתחיל עם המישור: $x + y + z = 4$, בעל הנורמל $(1,1,1)$, בכדי שהישר יהיה מקביל למישור, הרי שכיוונו חייב להיות ניצב לכיוון הנורמל של המישור, ולכן מכפלה $\underline{\hspace{1cm}}$ בין נורמל המישור ובין כיוון הישר חייבת להיות שווה $\underline{\hspace{1cm}}$:

$$(2, -1, -1) \cdot (1, 1, 1) = 2 - 1 - 1 = \underline{\hspace{1cm}}$$

הוכחנו כי הישר והמישור מקבילים זה לזה, נבחר את הנקודה $(1, 2, 2)$ המונחת על הישר ונחשב את מרחקה מהמישור:

$$\frac{|1 \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 1 \cdot \underline{\hspace{1cm}} + 1 \cdot \underline{\hspace{1cm}} - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

המישור השני: $\pi_2: x + y - 2z = 1$ בעל נורמל $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}})$, נחשב מכפלה $\underline{\hspace{1cm}}$ שלו עם כיוון הישר:

$$(2, -1, -1) \cdot (\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}}) = 2 - 1 + 2 = \underline{\hspace{1cm}} \neq 0$$

המישור והישר אינם מקבילים ולכן $\underline{\hspace{1cm}}$. בנקודה בה הם נחתכים המרחק ביניהם שווה 0, ולכן אם נציב את רכיבי הישר בנוסחה של מרחק נקודה ממישור, כאשר הנקודה הינה פונקציה של t , ונשווה את המרחק ל-0, נוכל לחלץ את t ולגלות את נקודת החיתוך:

$$\frac{|1 \cdot (1+2t) + 1 \cdot (2-t) - 2 \cdot (2-t) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{|-2+3t|}{\sqrt{6}} = 0 \quad \rightarrow \quad |-2+3t| = 0 \quad \rightarrow \quad 3t = 2 \quad \rightarrow \quad t = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$l(t) = \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right), 2 - \left(\frac{2}{3}\right), 2 - \left(\frac{2}{3}\right) \right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{נציב במשוואת הישר ונקבל את הנקודה:}$$

$$\pi_2: \frac{7}{3} + \frac{4}{3} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = 1 \quad \text{נציב את הנקודה במשוואת המישור ונראה כי היא מתקיימת:}$$

סימן שהנקודה אכן נמצאת על המישור ולכן מרחקה מהמישור שווה 0, וזו נקודת החיתוך בין הישר למישור.

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 2

שני מישורים, π_1 ו- π_2 , מקבילים זה לזה.
המישור π_1 עובר בנקודות $(3,0,3)$ ו- $(1,-4,1)$.
המישור π_2 עובר בנקודות $(2,-3,1)$ ו- $(3,-3,2)$.
א. מצאו את משוואות המישורים
ב. מצאו את המרחק בין המישורים

תשובה 2

סעיף א:

בשביל למצוא משוואה של מישור אנו זקוקים לנקודה המקיימת אותו ולכיוון לו. בכל אחד מהמישורים נוכל למצוא כיוון המקיים אותו (על ידי החסרת הנקודות זו מזו) ומכיוון שהישרים מקבילים זה לזה, אם נבצע מכפלה בין שני כיוונים אלו, נקבל את הנורמל של שני המישורים.

$$\text{עבור } \pi_1: (3,0,3) - (1,-4,1) = (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$$

$$\text{עבור } \pi_2: (3,-3,2) - (2,-3,1) = (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$$

נחשב מכפלה וקטורית בין שני הכיוונים בכדי למצוא את הנורמל למישורים:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}(\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} - \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}), -\underline{j}(\underline{\quad} \cdot \underline{\quad} - \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}), \underline{k}(2 \cdot 0 - 1 \cdot 4) = (4,0,-4) \quad \rightarrow \quad (1,0,-1)$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

נשתמש בנורמל עבור שני המישורים, ונבחר את אחת הנקודות מכל מישור:

$$\pi_1: 1(x - 3) + 0(y - 0) - 1(z - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} = 0 \quad \rightarrow \quad x = z$$

$$\pi_2: 1(x - 3) + 0(y + 3) - 1(z - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}} = 1 \quad \rightarrow \quad z = x - 1$$

סעיף ב:

נחשב את המרחק בין המישורים באמצעות:

$$\frac{|0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 3

מישור עובר בנקודה $(3,2,2)$ וניצב למישורים:
מה מרחק המישור מראשית הצירים?
 $3x + z - 2y = -7$, $x - 4y + 3z + 1 = 0$

תשובה 3

לצורך מציאת משוואת מישור, עלינו למצוא את הכיוון הניצב למישור (נורמל) ולמצוא איזושהי נקודה המקיימת את המישור. המישור המבוקש ניצב למישורים הנתונים ולכן כיווני הנורמלים של המישורים מקבילים לכיווני המישור. משמעות הדבר היא שאם נבצע כפל וקטורי בין נורמלי המישורים הנתונים, נקבל את כיוון הנורמל של המישור המבוקש:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}((-4) \cdot 1 - (-2) \cdot 3), -\underline{j}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3), \underline{k}(1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4)) = (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$$

נציב את הנקודה $(\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$ ואת הכיוון $(\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$ במשוואת המישור:

$$2(x - 3) + 8(y - 2) + 10(z - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\quad}x + \underline{\quad}y + \underline{\quad}z = \underline{\quad}$$

נחשב את מרחק הנקודה $(0,0,0)$ מהמישור:

$$\frac{|2 \cdot \underline{\quad} + 8 \cdot \underline{\quad} + 10 \cdot \underline{\quad} + 42|}{\sqrt{2^2 + 8^2 + 10^2}} = \frac{42}{2\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{2} = \sqrt{10.5}$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 4

נתונים המישורים: $x - 2y + 2z + 4 = 0$, $x - 2y + 2z + 3 = 0$

מה המרחק בין המישורים?

תשובה 4

ראשית נוודא שהמישורים זה לזה, כיוון שאם אינם , ברור שהמרחק ביניהם שווה אפס שכן הם נחתכים. מהתבוננות במישורים רואים שלשניהם אותו הנורמל $(1, -2, 2)$ ולכן ברור שהם מקבילים.

בשביל הספורט, נמצא נקודה הנמצאת על אחד המישורים ונחשב את מרחקה מהמישור השני: נציב במישור הראשון $x, y = 0$ ונקבל:

$$0 - 2 \cdot 0 + 2z + 4 = 0 \rightarrow 2z = -4 \rightarrow z = -2$$

אם כן, נחשב את המרחק של הנקודה $(\text{---}, \text{---}, -\text{---})$ מהמישור $x - 2y + 2z + 3 = 0$:

$$\frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

כמובן שאפשר גם לחשב את המרחק בין המישורים באמצעות:

$$\frac{|\text{---} - \text{---}|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{\text{---}}} = \frac{1}{3}$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 5

מה המרחק בין ציר z ובין הישר $l(t) = (1, -1, 0) + t(1, 0, 1)$

תשובה 5

נתייחס לציר z כאל ישר, ואז נחשב את המרחק בין שני הישרים.

נבחר נקודה על ציר z , לדוגמא: $(0, 0, 0)$ ואת הכיוון של ציר z , לדוגמא: $(0, 0, 1)$. נציג את הישר המתלכד עם ציר z :

$$l_z(t) = (\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}) + t(\underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad})$$

כעת נוכל לחשב את המרחק בין שני הישרים: לצורך חישוב מרחק בין ישרים l ו- l_z , נמצא שני מישורים π ו- π_z המכילים את הישרים ונחשב את המרחק בין המישורים. למציאת משוואת מישור אנו צריכים כיוון ניצב למישור ונקודה המקיימת את המישור. כיוון הניצב לשני המישורים המבוקשים יתקבל על ידי מכפלה וקטורית בין כיווני הישרים:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i}(0 \cdot 1 - 0 \cdot 1), -\underline{j}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1), \underline{k}(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = (0, -1, 0)$$

$$0(x - 1) - 1(y + 1) + 0(z - 0) = 0 \quad \rightarrow \quad -\underline{\quad} - \underline{\quad} = 0 \quad :l(t) \text{ המישור המכיל את הישר הנתון}$$

$$0(x - 1) - 1(y + 0) + 0(z - 0) = 0 \quad \rightarrow \quad -\underline{\quad} = 0 \quad \text{המישור המתלכד עם ציר } z:$$

$$d = \frac{|-1-0|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = \underline{\quad} \quad \text{אם כן, המרחק בין המישורים (שזה גם המרחק המבוקש בתרגיל - בין הישר הנתון ובין ציר } z):$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 6

שני מישורים, π_1 ו- π_2 , מקבילים ומרוחקים זה מזה שתי יחידות מרחק.
המישור π_1 עובר בנקודות $(2,0,3)$ ו- $(0,0,6)$. המישור π_2 עובר בנקודה $(-2,0,2)$.
מצאו את משוואות המישורים

תשובה 6

בשביל למצוא משוואה של מישור עלינו למצוא במישור ואת הכיוון למישור (נורמל). מנתוני השאלה נוכל להסיק כי לשני המישורים אותו הנורמל שכן הם מקבילים ולכן המקדמים (a, b, a) במשוואות המישורים צריכים להיות שווים, ורק הקבוע d שונה בין שני המישורים. משוואה כללית של מישור היא מהצורה: $ax + by + cz = d$
הנקודות הנתונות מקיימות את המישורים ולכן נוכל להציבן במשוואות המישור:

$$\pi_1: a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 3 = d_1 \quad \rightarrow \quad \text{}a + \text{}c = d_1$$

$$\pi_1: a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 6 = d_1 \quad \rightarrow \quad \text{}c = d_1$$

$$\pi_2: a \cdot (-2) + b \cdot 0 + c \cdot 2 = d_2 \quad \rightarrow \quad -\text{}a + \text{}c = d_2$$

$$2a + 3c = 6c \quad \rightarrow \quad \text{}a = \text{}c \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{2}c \quad \text{משתי המשוואות הראשונות נוכל לקבוע כי:}$$

$$-2 \cdot \frac{3}{2}c + 2c = d_2 \quad \rightarrow \quad -3c + 2c = d_2 \quad \rightarrow \quad -\text{} = d_2 \quad \text{נציב במשוואה השלישית:}$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

נשתמש בנתון שהמישורים רחוקים זה מזה 2 יחידות. לפי הנוסחה למציאת מרחק בין שני מישורים $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 2$:

$$\frac{|6c - (-c)|}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}c\right)^2 + b^2 + c^2}} = 2 \quad \rightarrow \quad |7c| = 2\sqrt{2.25 \cdot (c)^2 + b^2 + c^2} \quad \text{נכניס את כל הנתונים למשוואת המרחק:}$$

נעלה את שני אגפי המשוואה בריבוע:

$$_\cdot (c)^2 = _\cdot (2.25 \cdot (c)^2 + b^2 + c^2) \quad \rightarrow \quad 49 \cdot c^2 = 9 \cdot c^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 \quad \rightarrow \quad 36c^2 = 4b^2 \quad \rightarrow \quad 9c^2 = b^2$$

$$\sqrt{9c^2} = \sqrt{b^2} \quad \rightarrow \quad b = \pm _\cdot c \quad \text{נחשב שורש לשני אגפי המשוואה:}$$

כעת כל הפרמטרים מבוטאים באמצעות c . עבור b יש שתי אפשרויות שונות ($\pm$) כיוון שהוא יכול להיות חיובי או שלילי.

$$a = 1.5c \quad , \quad b = 3c \quad , \quad d_1 = 6c \quad , \quad d_2 = -c \quad \text{עבור האפשרות שהוא חיובי, הפרמטרים הם:}$$

$$1.5cx + 3cy + cz = 6c \quad \rightarrow \quad 1.5x + 3y + z = 6 \quad \text{נציב במשוואות של המישורים ונחלק ב-}c:$$

$$1.5cx + 3cy + cz = -c \quad \rightarrow \quad 1.5x + 3y + z = -1$$

$$a = 1.5c \quad , \quad b = -3c \quad , \quad d_1 = 6c \quad , \quad d_2 = -c \quad \text{עבור האפשרות שהוא שלילי, הפרמטרים הם:}$$

$$1.5cx - 3cy + cz = 6c \quad \rightarrow \quad 1.5x - 3y + z = 6 \quad \text{נציב במשוואות של המישורים ונחלק ב-}c:$$

$$1.5cx - 3cy + cz = -c \quad \rightarrow \quad 1.5x - 3y + z = -1$$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 7

נתון מישור: $x - 3y + 2z + 5 = 0$ וכדור: $(x - 5)^2 + (y + 14)^2 + (z - 9)^2 = 12^2$

מצאו את המרחק בין המישור ובין מרכז הכדור ואת המרחק בין המישור למעטפת הכדור

תשובה 7

מרכז הכדור הינו: $(_, _, _)$

בכדי לחשב את המרחק בין מרכז הכדור למישור נשתמש בנוסחא

לחישוב מרחק נקודה ממישור:

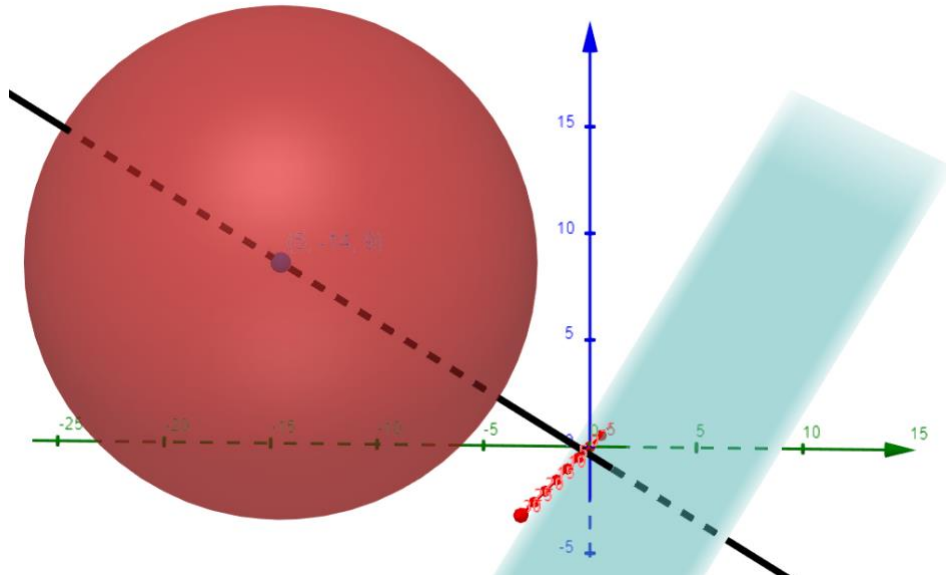
$$\frac{|1 \cdot _ - 3 \cdot -_ + 2 \cdot _ + 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = 5\sqrt{14}$$

מכיוון שידוע שרדיוס הכדור הינו $_$, נוכל להחסיר גודל זה

מהמרחק שמצאנו וכך לדעת את המרחק של המישור מהכדור

עצמו:

$$5\sqrt{14} - 12 = _$$



ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

שאלה 8

ישר עובר בנקודה: $(0,1,2)$ הישר מקביל למישור: $x + y + z = 2$

ומאונך לישר: $l(t) = (1 + t, 1 - t, 2t)$

א. מצאו את משוואת הישר

ב. מה המרחק בין הישר שמצאתם בסעיף א' ובין המישור הנתון?

תשובה 8

סעיף א:

לצורך מציאת הצגה של ישר, עלינו למצוא וכיוון. הנקודה נתונה בתרגיל $(\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$.

מנתוני התרגיל אפשר להבין שהישר המבוקש ניצב לנורמל המישור $(1,1,1)$ וניצב לכיוון הישר $l(t)$. הכיוון של $l(t)$ הוא: $(\underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}})$

נכפול מכפלה וקטורית בין נורמל המישור ובין כיוון הישר $l(t)$ ונקבל את כיוון הישר המבוקש:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i}(1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1), -\underline{j}(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1), \underline{k}(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (\underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}})$$

הצגה פרמטרית של הישר המבוקש הינה: $l_1(t) = (\underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}, \underline{\hspace{1cm}}) + t(\underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}}, -\underline{\hspace{1cm}})$

ישרים ומישורים במרחב – שאלות ממבחנים - תרגול

סעיף ב:

מכיוון שידוע שהישר מקביל למישור, נוכל לבחור כל נקודה על הישר ולחשב את מרחקה מהמישור.

נשתמש בנקודה הנתונה של הישר $(0,1,2)$.

רכיבי המישור לצורך שימוש בנוסחת המרחק הינם: $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, -2)$

המרחק בין הישר למישור הוא:

$$d = \frac{|\text{ } \cdot 0 + \text{ } \cdot 1 + \text{ } \cdot 2 - \text{ }|}{\sqrt{\text{ }^2 + \text{ }^2 + \text{ }^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$