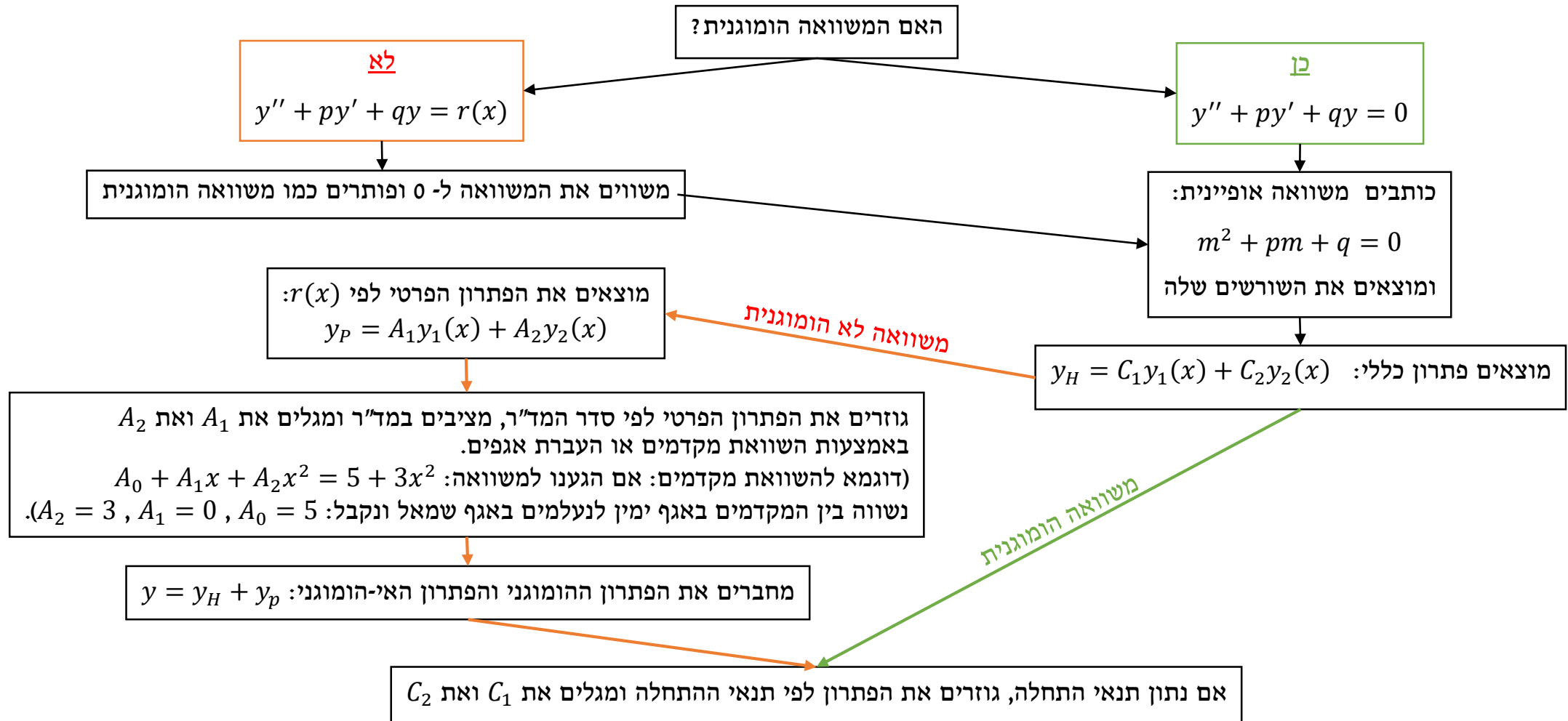


משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

תרשים סדר הפעולות לביצוע



משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

עבור משוואה הומוגנית מהצורה $(y'' + py' + qy = 0)$, מתאימים משוואה אופיינית: $m^2 + pm + q = 0$, מחשבים את שורשי המשוואה האופיינית ומוצאים את הפתרון ההומוגני הכללי לפי הטבלה:

שורשים	הפתרון הכללי
$m_1 \neq m_2$ (ממשיים)	$y_H = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x}$
$m_1 = m_2$ (ממשיים)	$y_H = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{m_1 \cdot x}$
$m_{1,2} = a \pm b_i$ (מרוכבים) $(a - \text{ממשי}, b - \text{מדומה})$	$y_H = C_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + C_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(bx)$

כאשר נתונים תנאי התחלה, גוזרים את הפתרון הכללי לפי תנאי ההתחלה, מציבים את התנאים ומגלים את C_1 ו- C_2

כאשר $r(x)$ הוא פולינום, הפתרון הפרטי למד"ר יהיה לפי הטבלה:

$r(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n$ (פולינום)	
הניחוש	שורשים
$y_P = A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_n \cdot x^n$	$m_1, m_2 \neq 0$
$y_P = x(A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_n \cdot x^n)$	$m_1 \neq m_2 = 0$
$y_P = x^2(A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_n \cdot x^n)$	$m_1 = m_2 = 0$

יש לשים לב כי כמות הנעלמים המחוברים היא לפי החזקה הגבוהה ביותר,

לדוגמא כאשר: $r(x) = x^3$ הניחוש יהיה: $y_P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 \cdot x^3$

משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

כאשר $r(x)$ הוא פונקציה מעריכית, הפתרון הפרטי למד"ר יהיה לפי הטבלה:

$r(x) = ke^{a \cdot x}$		
הניחוש	a	שורשים
$y_p = A \cdot e^{a \cdot x}$	$a \neq m_1, m_2$	m_1, m_2
$y_p = A \cdot x \cdot e^{a \cdot x}$	$a = m_1$ או $a = m_2$	$m_1 \neq m_2$
$y_p = A \cdot x^2 \cdot e^{a \cdot x}$	$a = m_1 = m_2$	$m_1 = m_2$

כאשר $r(x)$ הוא פונקציה טריגונומטרית, הפתרון הפרטי למד"ר יהיה:

$r(x) = A \cdot \cos(ax)$ או $r(x) = A \cdot \sin(ax)$ (טריגו)		
הניחוש הבסיסי הינו:	$y_p = A_1 \cdot \sin(ax) + A_2 \cdot \cos(ax)$	יש לשים לב כי A_1 ו- A_2 הם קבועים שיש לגלות בהמשך, ולא המקדמים שיש במד"ר המקורית. הפתרון הפרטי כולל תמיד גם את $\sin$ וגם את $\cos$ ובשניהם x מוכפל במקדם a
אם אחד או יותר מהמחברים בפתרון ההומוגני הוא ביטוי טריגונומטרי המופיע בפתרון הפרטי, נכפול את הניחוש במעלה הנמוכה ביותר של x שתניב לנו פונקציה שאין בה שום מחובר שהוא פתרון של המשוואה ההומוגנית	$y_p = x \cdot (A_1 \cdot \sin(ax) + A_2 \cdot \cos(ax))$	יש לשים לב כי אם בפתרון ההומוגני מופיע לדוגמא: $\sin(x)$ ואילו בפתרון הפרטי מופיע $\sin(2x)$, אין צורך לכפול את הפתרון ב- x
כאשר ב- $r(x)$ מופיעים ביטויים שונים זה מזה, לדוגמא: $\cos(ax) + \sin(bx)$ $a \neq b$ או לדוגמא: $\cos^2(x) + \sin(x)$ יש למצוא זהויות מתאימות בכדי להפוך את הביטויים לדומים זה לזה.		

כאשר $r(x)$ מכיל כמה מחברים שכל אחד מהם הוא סוג שונה של פונקציה (פולינום / מעריכית / טריגונומטרית), מוצאים פתרון פרטי לכל מחובר לחוד ומחברים את כל הפתרונות הפרטיים יחד עם הפתרון ההומוגני.

משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

כאשר מתבקשים למצוא פולינום מקלורן מסדר כלשהו לפתרון של בעיית ההתחלה, פותרים את הבעיה כרגיל ובסוף מוצאים פיתוח לכל אחד מהמחזורים שבפתרון, ומחברים את הפיתוחים יחד. לרוב אפשר להשתמש בפיתוחים ידועים (אם נדרש עד סדר כלשהו ואין את החזקה הזו בפיתוח, מחשבים עד חזקה אחת פחות):

תחום ההתכנסות	פיתוח	טור	
	$p(x)_n = f(x_0) + \frac{f(x_0)' \cdot x^1}{1!} + \frac{f(x_0)'' \cdot x^2}{2!} + \frac{f(x_0)''' \cdot x^3}{3!} + \dots + \frac{f(x_0)^{(n)} \cdot x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_0)^{(k)} \cdot x^k}{k!}$	פולינום מקלורן ($x_0 = 0$)	נוסחה כללית
	$p(x)_n = f(x_0) + \frac{f(x_0)' \cdot (x - x_0)^1}{1!} + \frac{f(x_0)'' \cdot (x - x_0)^2}{2!} + \frac{f(x_0)''' \cdot (x - x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{f(x_0)^{(n)} \cdot (x - x_0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_0)^{(k)} \cdot (x - x_0)^k}{k!}$	פולינום טיילור	
$-1 < x < 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$\frac{1}{1-x}$	פיתוחים ידועים
$-\infty < x < \infty$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	e^x	
$-\infty < x < \infty$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (-1)^k = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	e^{-x}	
$-\infty < x < \infty$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$\sin(x)$	
$-\infty < x < \infty$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$\cos(x)$	
$-1 < x \leq 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} (-1)^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$\ln(1+x)$	
$-1 \leq x \leq 1$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$\tan^{-1}(x)$	