חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב'

לאוניברסיטה הפתוחה

דף נוסחאות לבחינה

מומלץ להדפיס מכאן גם הסיכום של חדו״א א׳!

טורים – דף נוסחאות למבחן

תנאי הכרחי (אך לא מספיק) להתכנסות של טור – האיבר הכללי שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף
אריתמטיקת טורים – אך ורק בטורים **מתכנסים** (מוריש את תכונת ההתכנסות הלאה) (אפשר להשתמש בהוכחה על דרך השלילה להתכנסות): $\sum(a_n+b_n)$, $\sum(a_n-b_n)$, $\sum(a_n\times\alpha)$

טורים חיוביים

טור גיאומטרי	$\sum_{n=a}^{\infty} q^n \begin{cases} -1<q<1 & \rightarrow \text{מתכנס} = \frac{1}{1-q} \\ q\geq 1 \text{ or } q\leq -1 & \rightarrow \text{מתבדר} \end{cases}$	$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$
טור הרמוני P	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} 0<p\leq 1 & \rightarrow \text{מתבדר} \\ p>1 & \rightarrow \text{מתכנס}\end{cases}$	
מבחן המנה	נתון טור חיובי: $\sum A_n$, נגדיר: $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}$ אם $\rho=1$ המבחן לא עובד, אם $\rho>1$ הטור מתבדר, אם $\rho<1$ הטור מתכנס	
מבחן ההשוואה הקלאסי	נתון טור חיובי: $\sum A_n$, נמצא טור גדול יותר שמתכנס כדי להוכיח התכנסות, וקטן יותר שמתבדר כדי להוכיח התבדרות	
מבחן ההשוואה הגבולי	נתון טור חיובי: $\sum A_n$, נגדיר טור בוחן חיובי: $\sum B_n$ כעת נבדוק: $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ אם ρ יוצא מספר ממשי חיובי, אזי הטורים $\sum A_n$ ו $\sum B_n$ מאותו הסוג (או מתבדרים או מתכנסים)	
מבחן האינטגרל	נתון טור חיובי: $\sum A_n$, נגדיר פונקציית עזר $f(x)=A_n$, נבדוק אם הפונקציה **רציפה ויורדת** בכל התחום של הטור, אם כן, נוכל להשתמש במבחן ולבדוק האם האינטגרל של פונקציית העזר מתכנס או מתבדר	

טורים כלליים

טור הרמוני P מחליף סימן	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ | $p>0$ → מתכנס
מבחן לייבניץ להתכנסות	1. החלק החיובי של האיבר הכללי שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף 2. החלק החיובי של האיבר הכללי מתחיל לרדת מ-n מסוים
טור ערכים מוחלטים	אם טור הערכים המוחלטים מתכנס, הטור המקורי "מתכנס בהחלט". אם הטור המקורי מתכנס וטור הערכים המוחלטים מתבדר, הטור המקורי "מתכנס בתנאי".
מבחן המנה להתכנסות בהחלט	נתון טור: $\sum A_n$, נגדיר: $\rho=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right\|$, אם $\rho=1$ המבחן לא עובד, אם $\rho>1$ הטור מתבדר, אם $\rho<1$ הטור מתכנס בהחלט

טור חזקות ב-x - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$ - תחום ההתכנסות – כל ערכי x עבורם הטור מתכנס
1. בודקים התכנסות בהחלט בעזרת מבחן המנה להתכנסות בהחלט כאשר x נעלם,
2. מחלצים את x מאי-השוויון $\rho<1$ (x מופיע בערך מוחלט, ולכן מקבלים שני איקסים – חיובי ושלילי, אשר בניהם נמצא תחום ההתכנסות),
3. עבור ערכי x בקצוות של תחום ההתכנסות בודקים באופן פרטני – מכניסים את הערכים בטור המקורי ובודקים התכנסות / התבדרות

טור חזקות ב$x-x_0$ - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$

טורים – דף נוסחאות למבחן

	טור	פיתוח	תחום ההתכנסות
נוסחה כללית	פולינום מקלורן $(x_0=0)$	$p(x)_n=f(x_0)+\frac{f(x_0)'\cdot x^1}{1!}+\frac{f(x_0)''\cdot x^2}{2!}+\frac{f(x_0)'''\cdot x^3}{3!}+\cdots+\frac{f(x_0)^{(n)}\cdot x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_0)^{(k)}\cdot x^k}{k!}$	
	פולינום טיילור	$p(x)_n=f(x_0)+\frac{f(x_0)'\cdot(x-x_0)^1}{1!}+\frac{f(x_0)''\cdot(x-x_0)^2}{2!}+\frac{f(x_0)'''\cdot(x-x_0)^3}{3!}+\cdots+\frac{f(x_0)^{(n)}\cdot(x-x_0)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_0)^{(k)}\cdot(x-x_0)^k}{k!}$	
פיתוחים ידועים	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$	$-1<x<1$
	e^x	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
	e^{-x}	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}(-1)^k=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$	$-\infty<x<\infty$
	$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
	$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$	$-\infty<x<\infty$
	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}(-1)^k=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$-1<x\le 1$
	$tan^{-1}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}(-1)^k=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$	$-1\le x\le 1$

- ברוב מוחלט של התרגילים אפשר להשתמש בפיתוחים ידועים. לפעמים נדרש לעשות מעט מניפולציות

(לדוגמא: לכפול את x בקבוע כלשהו, או אם יש ביטוי כזה: $\frac{1}{a-x}$ אפשר להמיר אותו לביטוי הזה: $\frac{1}{a(1-\frac{x}{a})}$ שזה למעשה שווה לביטוי הזה: $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{a})}$ ולפי זה נוכל לכפול את כל הטור ב- $\frac{1}{a}$ ולהשתמש בפיתוח של $\frac{1}{1-x}$ כאשר $x=\frac{x}{a}$)

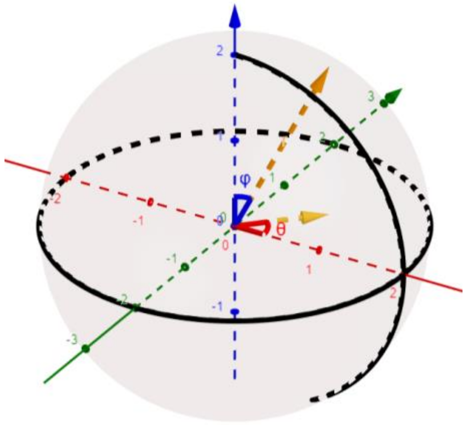
המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

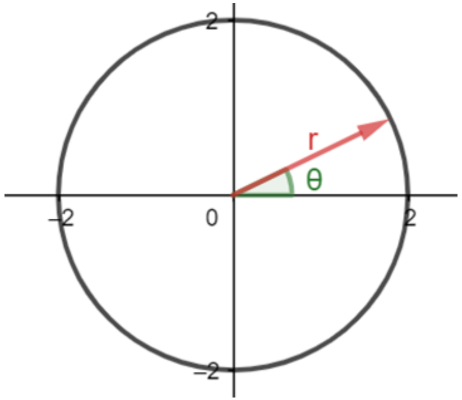
מקרטזי לפולרי			
$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$	$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$	$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$	כאשר הנקודה נמצאת על ציר y (זאת אומרת: $x = 0$) הפונקציה tan^{-1} לא מוגדרת. כאשר הנקודה נמצאת מחוץ לרביע הראשון, יש לתקן את הזווית המתקבלת על ידי מציאת הזווית "מראה" של הזווית שהתקבלה. (לדוגמא הנקודה (-1,-1) תיתן זווית של $\frac{1}{4}\pi$, אך באמת הזווית היא: $\frac{5}{4}\pi$).
$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$	$r = \frac{x}{\cos(\theta)}$	$r = \frac{y}{\sin(\theta)}$	

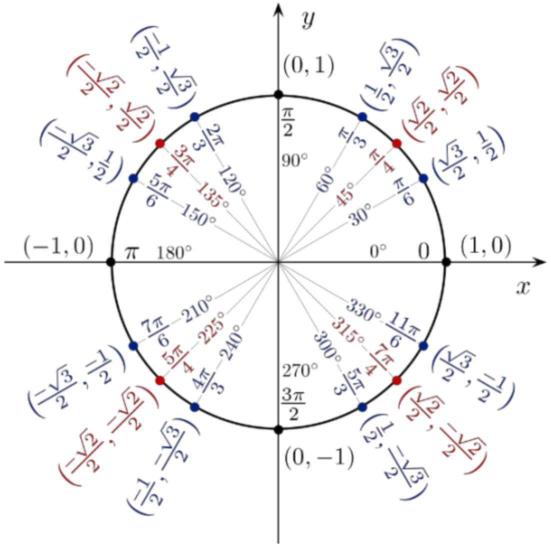
מפולרי לקרטזי	
$x = r \cdot \cos(\theta)$	מציאת ערכי x ו-y על ידי שימוש ברדיוס וזווית
$y = r \cdot \sin(\theta)$	

מקרטזי לכדורי		
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	θ - הזווית שבין היטל r על מישור xy וציר x	$\theta \in [0,2\pi]$
$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$	φ - הזווית של r מציר z	$\varphi \in [0,\pi]$
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	r - המרחק שבין ראשית הצירים לנקודה	$r \geq 0$

מכדורי לקרטזי	
$x = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta)$	מציאת ערכי x, y ו- z על ידי שימוש ברדיוס ובזוויות
$y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\theta)$	
$z = r \cdot \cos(\varphi)$	







המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

חוקים		
משימה	**הצגה קרטזית**	**הצגה פולרית**
הזזת מרכז הגוף לנקודה (x_0, y_0, z_0)	**מחסרים** את רכיבי הנקודה מהמשתנים של פונקציית הגוף בהתאמה (לדוגמא: $(x-x_0)^2$)	**מוסיפים** את רכיבי הנקודה לרכיבי הפונקציה בהתאמה (לדוגמא: $r \cdot cos(\theta) + x_0$)
כיווץ עיגול לכדי אליפסה כך שהרדיוס בכיוון ציר x הוא r_x, ובכיוון ציר y הוא r_y	**מחלקים** את משתני הפונקציה בהתאמה (לדוגמא: $\frac{x^2}{{r_x}^2}$)	**מכפילים** כל רכיב של הפונקציה ביחס של הכיוון שלה בהתאמה (לדוגמא: $r_x \cdot \cos(\theta)$)

גופים דו מימדיים נפוצים		
גוף	**הצגה קרטזית**	**הצגה פולרית**
עיגול שמרכזו ב- $(0,0)$	$x^2 + y^2 = r^2$	$l(\theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$
עיגול שמרכזו ב- (x_0, y_0)	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$	$l(\theta) = (r \cdot cos(\theta) + x_0, r \cdot sin(\theta) + y_0)$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$
אליפסה שמרכזה ב - $(0,0)$, רדיוסה בכיוון ציר x הוא r_x, ובכיוון ציר y הוא r_y	$\frac{x^2}{{r_x}^2} + \frac{y^2}{{r_y}^2} = 1$	$l(\theta) = \left(r_x \cdot \cos(\theta), r_y \cdot \sin(\theta)\right)$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$
אליפסה שמרכזה בנקודה (x_0, y_0), רדיוסה בכיוון ציר x הוא r_x, ובכיוון ציר y הוא r_y	$\frac{(x-x_0)^2}{{r_x}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{{r_y}^2} = 1$	$l(\theta) = \left(r_x \cdot \cos(\theta) + x_0, r_y \cdot \sin(\theta) + y_0\right)$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

גופים תלת ממדיים נפוצים

גוף	מרכז	הצגה קרטזית			הצגה פולרית / כדורית / גלילית
גליל (מקביל לציר z)	$(0,0)$	$x^2+y^2=r^2$		$0\le\theta\le2\pi$ $-\infty\le h\le\infty$	$\pi(h,\theta)=(R\cdot\cos\theta\,,R\cdot\sin\theta\,,h)$
כדור	$(0,0,0)$	$x^2+y^2+z^2=r^2$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=(r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta),r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta),r\cdot\cos(\varphi))$
כדור	(x_0,y_0,z_0)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=(r\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)+x_0\,,r\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)+y_0\,,r\cdot\cos(\varphi)+z_0)$
אליפסואיד	$(0,0,0)$	$\frac{x^2}{{r_x}^2}+\frac{y^2}{{r_y}^2}+\frac{z^2}{{r_z}^2}=1$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=\left(r_x\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)\,,r_y\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)\,,r_z\cdot\cos(\varphi)\right)$
אליפסואיד	(x_0,y_0,z_0)	$\frac{(x-x_0)^2}{{r_x}^2}+\frac{(y-y_0)^2}{{r_y}^2}+\frac{(z-z_0)^2}{{r_z}^2}=1$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le\varphi\le\pi$	$\pi(\varphi,\theta)=\left(r_x\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\theta)+x_0\,,r_y\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)+y_0\,,r_z\cdot\cos(\varphi)+z_0\right)$
פרבולואיד עליון	$(0,0,0)$	$x^2+y^2-z=0$	$z=x^2+y^2$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta\,,r\cdot\sin\theta\,,r^2)$
פרבולואיד תחתון	$(0,0,0)$	$x^2+y^2+z=0$	$z=-x^2-y^2$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta\,,r\cdot\sin\theta\,,-r^2)$
פרבולואיד עליון	(x_0,y_0,z_0)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-z+z_0=0$	$z=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta+x_0\,,r\cdot\sin\theta+y_0\,,r^2+z_0)$
פרבולואיד אליפטי עליון	$(0,0,0)$	$\frac{x^2}{{r_x}^2}+\frac{y^2}{{r_y}^2}-z=0$		$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r_x\cdot r\cdot\cos\theta\,,r_y\cdot r\cdot\sin\theta\,,r^2)$
חרוט*	$(0,0,0)$	$x^2+y^2-z^2=0$	$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$	$0\le\theta\le2\pi$ $0\le r$	$\pi(r,\theta)=(r\cdot\cos\theta\,,r\cdot\sin\theta\,,\pm r)$

* כדי להציג רק את חלקו העליון (שמעל מישור xy) או את חלקו התחתון (שמתחת למישור xy), נשתמש בהצגה מפורשת ונבחר את סימן הפלוס שלפני השורש לחרוט עליון, או את סימן המינוס לחרוט תחתון. בקואורדינטות פולריות, נבחר את הסימן שלפני רכיב ה-z בהתאם לנדרש (חרוט עליון – סימן פלוס, תחתון – סימן מינוס)

המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

<u>נוסחאות שונות לעקומות פרמטריות - שטחים, אורכים, מרחקים</u>

שטח הכלוא בין שתי זוויות (θ_1 , θ_2) היוצאות מראשית הצירים ועקומה פולרית המיוצגת על ידי r:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta$$

הדרך בין נקודות במרחב על עקומה וקטורית – אורך קשת (אינטגרל של המהירות):

$$\text{S} = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = \int_a^b \left\| \frac{dr}{dt} \right\| dt$$

(חשוב לזכור כי: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$)

מרחק בין 2 נקודות במרחב:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

המישור והמרחב – דף נוסחאות למבחן

טריגונומטריה

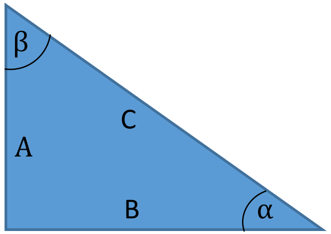
זוויות במשולש ישר זווית

$\frac{A}{C} = \sin(\alpha) \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{A}{C}\right) = \alpha$

$\frac{B}{C} = \cos(\alpha) \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{B}{C}\right) = \alpha$

$\frac{B}{C} = \sin(\beta) \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{B}{C}\right) = \beta$

$\frac{A}{C} = \cos(\beta) \rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{A}{C}\right) = \beta$



$\frac{A}{B} = \tan(\alpha) \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) = \alpha$

$\frac{B}{A} = \tan(\beta) \rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) = \beta$

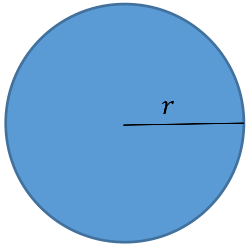
משפט הקוסינוסים:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$

(α – הזווית שבין a ו-b)

גופים פשוטים במישור

עיגול

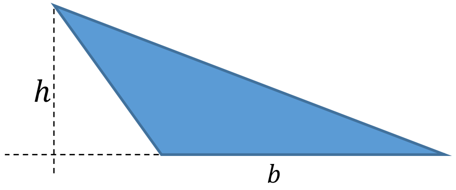


שטח: $A = \pi r^2$

היקף: $C = 2\pi r$

שטח של אליפסה מהצורה $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = r^2$: $A = \pi ab$

משולש

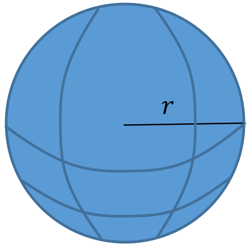


שטח: $A = \frac{1}{2}bh$

שטח משולש שווה צלעות: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

גופים פשוטים במרחב

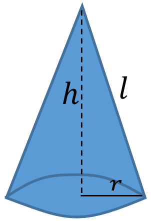
כדור



נפח: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

שטח מעטפת: $S = 4\pi r^2$

חרוט



נפח: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

שטח מעטפת: $S = \pi r l$

וקטורים – דף נוסחאות למבחן

נוסחאות כלליות	
מציאת וקטור על פי 2 נקודות	$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A\ ,\ z_B - z_A)$
חיבור וחיסור של וקטורים	$\underline{v}(v_1, v_2, v_3) + \underline{u}(u_1, u_2, u_3) = (v_1 + u_1\ , v_2 + u_2\ ,\ v_3 + u_3)$ * בחיסור החץ בכיוון של הווקטור שממנו מחסרים את הווקטור השני
אורך / גודל של וקטור – נורמה	$\lVert\underline{v}\rVert = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2} = \sqrt{\underline{v} \bullet \underline{v}}$
הפיכת וקטור לוקטור בגודל של וקטור יחידה (נרמול)	$\hat{u} = \dfrac{u}{\lVert\underline{u}\rVert} = \dfrac{u_1}{\lVert\underline{u}\rVert}, \dfrac{u_2}{\lVert\underline{u}\rVert}, \dfrac{u_3}{\lVert\underline{u}\rVert}$
הצגת וקטור כחיבור של שלושת ווקטורי היחידה	$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$

מכפלה סקלרית (דוט)	
	$\underline{v} \bullet \underline{u} = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3$ $\underline{v} \bullet \underline{u} = \lVert\underline{v}\rVert \cdot \lVert\underline{u}\rVert \cdot \cos(\alpha)$
קוסינוס הזווית בין שני וקטורים	$\cos(\alpha) = \dfrac{\underline{v} \bullet \underline{u}}{\lVert\underline{v}\rVert \cdot \lVert\underline{u}\rVert}$
ניצבות בין שני וקטורים	$\underline{v} \bullet \underline{u} = 0 \iff \underline{v} \perp \underline{u}$
היטל של $\underline{u}$ על $\underline{v}$	$\underline{p} = \underline{v} \cdot \dfrac{\underline{v} \bullet \underline{u}}{\underline{v} \bullet \underline{v}}$ $= \underline{v} \cdot \dfrac{\underline{v} \bullet \underline{u}}{\lVert\underline{v}\rVert^2}$

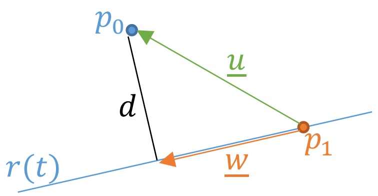
מכפלה וקטורית (קרוס)	
	$\underline{v} \times \underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(v_2 \cdot u_3 - u_2 \cdot v_3), -\underline{j}(v_1 \cdot u_3 - u_1 \cdot v_3), +\underline{k}(v_1 \cdot u_2 - u_1 \cdot v_2)$
גודל הווקטור הנוצר ממכפלה וקטורית = שטח המקבילית הנוצרת בין שני הווקטורים	$\lVert\underline{v} \times \underline{u}\rVert = \lVert\underline{v}\rVert \cdot \lVert\underline{u}\rVert \cdot \sin(\alpha)$
מקבילות בין שני וקטורים	$\underline{v} \times \underline{u} = 0{,}0{,}0 \iff \underline{v} \parallel \underline{u}$

תכונות:	הווקטור הנוצר ניצב לשני הוקטורים	החלפת סימן	הכפלת וקטור בעצמו נותנת את וקטור האפס	חוק הפילוג
	$\underline{v} \times \underline{u} \perp \underline{u}$ $\underline{v} \times \underline{u} \perp \underline{v}$	$\underline{v} \times \underline{u}$ $= -(\underline{u} \times \underline{v})$	$\underline{v} \times \underline{v} = 0{,}0{,}0$	$\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w})$ $= \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}$

מכפלה מעורבת	
	$\underline{w} \bullet \underline{v} \times \underline{u} = \underline{w} \bullet (\underline{v} \times \underline{u}) = \underline{w} \bullet \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$ $w_1(v_2 \cdot u_3 - u_2 \cdot v_3) - w_2(v_1 \cdot u_3 - u_1 \cdot v_3)$ $+ w_3(v_1 \cdot u_2 - u_1 \cdot v_2)$
מכפלה סקלרית של וקטור במכפלה וקטורית שלו עם וקטור אחר	$\underline{v} \bullet \underline{v} \times \underline{u} = 0$ או $\underline{u} \bullet \underline{v} \times \underline{u} = 0$
כאשר 3 וקטורים $(\underline{w}, \underline{v}, \underline{u})$ מונחים על אותו מישור	$\underline{w} \bullet \underline{v} \times \underline{u} = 0$
כאשר הם לא מונחים על אותו המישור, נפח המקבילון הנוצר בניהם	$\lvert\underline{w} \bullet \underline{v} \times \underline{u}\rvert$

ישרים ומישורים במרחב – דף נוסחאות למבחן

ישרים במרחב		
מצבים בין שני ישרים	מקבילים	לשני הישרים אותו כיוון – מציגים את משוואות הישרים בצורה של נקודה וכיוון ובודקים האם כיוון של ישר אחד הוא מכפלה של כיוון הישר השני.
	מצטלבים / נחתכים	לישרים כיוונים שונים וצריך לבדוק האם יש להם נק' משותפת – אם כן הם נחתכים, אם לא הם מצטלבים. -מסמנים כל ישר עם משתנה אחר, לדוגמא s ו-t, ומציגים כל רכיב של הישרים בנפרד: $(x_0+tv_1),(y_0+tv_2),(z_0+tv_3)$, $(x_0+sv_1),(y_0+sv_2),(z_0+sv_3)$, -משווים בין רכיבי x ו-y של הנקודות: $x_0+sv_1=x_0+tv_1$, $y_0+sv_2=y_0+tv_2$ ומחשבים את s ו-t משתי המשוואות, -בונים משוואה שלישית באמצעות השוואה בין רכיבי ה-z: $z_0+sv_3=z_0+tv_3$, -מציבים את במשוואה האחרונה, אם היא מתקיימת - הישרים נחתכים, ואם לא - מצטלבים

משימה		איך עושים?
הצגה פרמטרית באמצעות נקודה $p_0(x_0,y_0,z_0)$ וכיוון $\underline{t}=(v_1,v_2,v_3)$		$\underline{r}(t)=p_0+t\underline{v}=(x_0,y_0,z_0)+t(v_1,v_2,v_3)=((x_0+tv_1),(y_0+tv_2),(z_0+tv_3))$
מציאת כיוון של ישר באמצעות 2 נקודות המקיימות את הישר		מחסרים את רכיבי אחת הנקודות מרכיבי הנקודה השנייה: $\underline{v}=p_1-p_2=(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$
מרחק בין נקודה במרחב לישר $\underline{r}(t)$		1. בחירת נקודה אקראית על הישר $p_1(x_1,y_1,z_1)$ 2. חישוב הוקטור היוצא מהנקודה האקראית אל הנקודה הנתונה: $\underline{u}=p_0-p_1$ 3. הצגת כיוון הישר כוקטור: $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 4. חישוב היטל הוקטור שבין שתי הנקודות על וקטור הישר: $\underline{w}=\underline{v}\cdot\frac{\underline{v}\bullet\underline{u}}{\underline{v}\bullet\underline{v}}$ 5. חישוב הגדלים של שני הוקטורים שחישבנו בשלבים 2 ו-4: $\lVert\underline{w}\rVert$, $\lVert\underline{u}\rVert$ 6. חישוב אורך הניצב האחרון במשולש ישר הזווית שנוצר באמצעות משפט פיתגורס: $d=\sqrt{\lVert\underline{u}\rVert^2-\lVert\underline{w}\rVert^2}$ (זהו המרחק הנדרש) 
מרחק בין שני ישרים מקבילים		בחירת נקודה אקראית על אחד הישרים וחישוב המרחק שלה מהישר השני
מרחק בין שני ישרים מצטלבים		1. חישוב מכפלה וקטורית בין כיווני הישרים 2. מציאת שני מישורים המכילים את הישרים ומקבילים זה לזה (עבור כל מישור משתמשים במכפלה הוקטורית כנורמל ובנקודה על הישר) 3. חישוב המרחק בין המישורים
מעבר מהצגה כ"**ישר החיתוך**" בין שני מישורים ל**הצגה פרמטרית**	שיטה 1	1. מציאת נורמלים לשני המישורים (המקדמים של x, y, z במשוואות המישורים או כפל וקטורי בין כיווני המישור בהצגה פרמטרית של המישורים), 2. חישוב מכפלה וקטורית (קרוס) לשני הנורמלים ושימוש בכיוון של התוצאה ככיוון הישר המבוקש, 3. מציאת נקודה כלשהי על הישר (נקודה המקיימת את שתי משוואות המישורים), 4. הצגת הישר המבוקש באמצעות נקודה וכיוון.
	שיטה 2	1. חיסור / חיבור שתי משוואות המישורים תוך ניסיון "להיפטר" מאחד הנעלמים, 2. בחירת 2 נקודות שרירותיות והצבתן במשוואה שהתקבלה, 3. הצבת הערכים שהתקבלו באחת המשוואות המקוריות ומציאת הערך השלישי בשתי הנקודות השרירותיות, 4. בניית ישר החיתוך ע"י חיסור הנקודות אחת מהשנייה עבור כיוון הישר, ושימוש באחת הנקודות השרירותיות עבור הנקודה.

ישרים ומישורים במרחב – דף נוסחאות למבחן

מישורים במרחב		
מצבים בין שני מישורים	מקבילים	לשני המישורים אותו כיוון (ולכן הם לא נחתכים) – נורמלי שני המישורים צריכים להיות באותו הכיוון (עד כדי כפל בקבוע)
	נחתכים	נורמלי המישורים בעלי כיוון שונה – המישורים נחתכים והקו שבו הם נחתכים נקרא "ישר החיתוך" – השיטות למציאתו בעמוד על ישרים במרחב

משימה	איך עושים?
מציאת משוואת מישור באמצעות נקודה על המישור $p(x_0\,,y_0\,,z_0)$, ונורמל למישור (הכיוון שניצב לכיוון המישור): $\underline{n}=(a,b,c)$	$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
הצגה פרמטרית באמצעות שני כיוונים המקיימים את המישור $\underline{w}=(w_1,w_2,w_3)$, $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$, ונקודה במישור $p(x_0\,,y_0\,,z_0)$	$\pi:(x_0,y_0,z_0)+t(v_1,v_2,v_3)+s(w_1,w_2,w_3)$
מציאת משוואת מישור בהינתן 3 נקודות (A,B,C)	1. חישוב שני וקטורים היוצאים מאותה נקודה באמצעות חיסור רכיבי הנקודות (לדוגמא: $\underline{AB}=B-A$ וגם: $\underline{AC}=C-A$) 2. חישוב הנורמל למישור באמצעות מכפלה וקטורית (קרוס) בין הוקטורים: $\underline{N}=\underline{AB}\times\underline{AC}=(a,b,c)$ 3. בחירת אחת הנקודות $(x_0\,,y_0\,,z_0)$ הנתונות בתרגיל, ושימוש ברכיבי הנורמל (a,b,c) במשוואה למציאת מישור: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
מעבר ממשוואת מישור להצגה פרמטרית	1. מציאת 3 נקודות $(A\,,B\,,C)$ המקיימות את משוואת המישור: בחירת שני רכיבים שרירותיים של הנקודה (למשל X ו-Y), הצבתם במשוואת המישור וחישוב הרכיב השלישי של הנקודה (חוזרים על התהליך 3 פעמים למציאת שלושת הנקודות) 2. חישוב 2 וקטורים המונחים במישור ע"י החסרת רכיבי שתי נקודות מהנקודה השלישית: $\underline{AB}=B-A$ וגם: $\underline{AC}=C-A$ 3. שימוש באחת הנקודות שמצאנו בשלב 1, ובשני הוקטורים להצגה פרמטרית של מישור: $\pi:(x_0,y_0,z_0)+t(v_1,v_2,v_3)+s(w_1,w_2,w_3)$ (אפשר להכפיל או לחלק את הוקטורים בקבוע לצורך קבלת מספרים "יפים" יותר)
מעבר מהצגה פרמטרית למשוואת מישור	1. הכפלת וקטורי הכיוון במכפלה וקטורית: $\underline{v}\times\underline{w}$ למציאת נורמל המישור 2. שימוש בנקודה הנתונה בהצגה הפרמטרית וברכיבי הנורמל לחישוב משוואת המישור
מציאת מרחק נקודה $p(x_0\,,y_0\,,z_0)$ ממישור $ax+by+cz+d=0$	$d_{point\rightarrow plain}=\frac{\|ax_0+by_0+cz_0+d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (יש לשים לב שמשוואת המישור נתונה בצורה הרשומה כאן, אם d באגף השני, יש לשנות את סימנו בנוסחה)
מציאת מרחק בין שני מישורים מקבילים	$d_{plain\rightarrow plain}=\frac{\|d_1-d_2\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (אם המקדמים a,b,c של שני המישורים לא שווים בדיוק, כופלים את אחד המישורים בסקלר כלשהו בכדי להשוותם)
מציאת מישור משיק לפונקציה כלשהי $f(x\,,y\,,z)$ בנקודה נתונה $p(x_0\,,y_0\,,z_0)$	1. גזירת הפונקציה לפי כל המשתנים שלה: f_x , f_y , f_z 2. הצבת הנקודה הנתונה בנגזרות החלקיות לחישוב הנורמל לפונקציה בנקודה 3. שימוש בנקודה וברכיבי הנורמל במשוואה למציאת מישור: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

עקומות ומשטחים פרמטריים – דף נוסחאות למבחן

משימה	נוסחאות	משמעות / הערות
עקומות ומשטחים פרמטריים		
משימה	**נוסחאות**	**משמעות / הערות**
נקודת חיתוך בין עקומות	מציגים כל עקומה עם פרמטר שונה, יוצרים 3 משוואות (עבור רכיבי העקומות) עם שני נעלמים (עבור הפרמטרים) ובודקים אם שלושת המשוואות מתקיימות, אם כן, יש נקודת חיתוך. מציבים את הפרמטר שקיבלנו בעקומה המתאימה, ומגלים את נקודת החיתוך. אם שני גופים יצאו באותו זמן, כל אחד על עקומה אחרת, והעקומות נחתכות, בשביל שייפגשו, הפרמטר של שתי העקומות צריך להיות שווה בנקודת החיתוך.	
זווית חיתוך בין עקומות	מגלים את נקודת החיתוך, מחשבים את שיפועי העקומות בנקודה באמצעות נגזרות של העקומות, ומחשבים את הזווית בין הנגזרות באמצעות זווית בין וקטורים.	
נורמה של עקומה	$\\|\underline{r}(t)\\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} = C = r^2$	אם הנורמה של עקומה קבועה – העקומה מונחת על כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו $\\|\underline{r}(t)\\|$ המהירות ניצבת לרדיוס וקטור של העקומה $\underline{r}(t) \bullet \underline{r}'(t) = 0 \Leftrightarrow \underline{r}(t) \perp \underline{r}'(t)$
נגזרת ראשונה	$v(t) = \underline{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$	הוקטור המשיק לעקומה = וקטור המהירות של עקומה
נורמה של הנגזרת הראשונה	$\\|\underline{r}'(t)\\| = \\|v(t)\\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$	המהירות עצמה = גודל המהירות
אורך של עקומה	$L = \int_a^b \\|\underline{r}'(t)\\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$	אורך של עקומה בקטע [a,b] מחושב באמצעות אינטגרל של הנורמה של הנגזרת הראשונה
נגזרת שניה	$a(t) = \underline{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$	וקטור התאוצה
נורמל למשטח פרמטרי	$\pi_s \times \pi_t$	גוזרים את המשטח לפי כל אחד מהמשתנים וכופלים מכפלה וקטורית בין הנגזרות. שימו לב! ברוב המקרים עדיף להבין באיזה משטח מדובר ולחשב את הנורמל לפי הצגה קרטזית.

פונקציות מרובות משתנים – דף נוסחאות למבחן

<table>
<tr><th colspan="2">חקירת פונקציה מרובת משתנים</th></tr>
<tr><th>משימה</th><th>איך עושים?</th></tr>
<tr><td>תחום הגדרה</td><td>בודקים האם יש ערכים של x ו-y עבורם הפונקציה לא מוגדרת:
1. מכנה של שבר לא מתאפס,
2. ביטוי בתוך שורש לא שלילי
3. ביטוי בתוך ln לא קטן או שווה 0</td></tr>
<tr><td>רציפות</td><td>פונקציה תיקרא "רציפה" בנקודה (x_0,y_0) אם ורק אם ערך הפונקציה בנקודה שווה לגבול של הפונקציה כאשר הפונקציה שואפת לנקודה: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$
אם נתונות שתי פונקציות רציפות של משתנה אחד $g(x),h(y)$ אז החיבור / המכפלה שלהן זוהי פונקציה רציפה בשני משתנים: $f(x,y)=g(x)+h(y)$ $f(x,y)=g(x)h(y)$
אם נתונה פונקציה רציפה במשתנה אחד $g(x)$ ופונקציה רציפה בשני משתנים $h(x,y)$ אז ההרכבה שלהן זוהי פונקציה רציפה בשני משתנים: $f(x,y)=g(h(x,y))$</td></tr>
<tr><td>שרטוט קווי גובה</td><td>מוצאים את עקומת החיתוך של הפונקציה עם מישורים שונים המקבילים למישור xy, לדוגמא, המישורים: $z=3,\ \ z=2,\ \ z=1,\ \ z=0$.
במילים אחרות, כאשר נתונה פונקציה במרחב מהצורה: $z=f(x,y)$, נשווה את z לקבועים כלשהם כדי לקבל את היטל עקומת החיתוך של הפונקציה והמישורים השונים על מישור xy.
לאחר שיהיו לנו מספר עקומות חיתוך שכאלו, נוכל לשרטט את ההיטל שלהן במישור xy ולקבל "מפה טופוגרפית" של הפונקציה.</td></tr>
<tr><td>נקודות קיצון</td><td>נקודות חשודות – נגזרות חלקיות שוות 0, נגזרות חלקיות לא קיימות (שפיץ),
מבחן הנגזרות החלקיות השניות – נתונה נקודה (x_0,y_0) החשודה לקיצון בפונקציה f, נגדיר: $D=f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-{f_{xy}}^2(x_0,y_0)$
<table><tr><th colspan="2">$D>0$</th><th>$D<0$</th><th>$D=0$</th></tr><tr><td>$f_{xx}(x_0,y_0)>0$</td><td>$f_{xx}(x_0,y_0)<0$</td><td></td><td rowspan="2">המבחן לא מספק תשובה. צריך לבחון את הפונקציה עצמה.</td></tr><tr><td>מינימום מקומי</td><td>מקסימום מקומי</td><td>אוכף</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>מציאת קיצון תחת אילוץ – שימוש בכופלי לגרנאז'</td><td>בהינתן פונקציה $f(x,y,z)$ (להלן: פונקציית המטרה) ומעוניינים למצוא עליה נקודת קיצון תחת האילוץ: $g(x,y,z)=0$,
1. מחשבים את הגרדיינט עבור שתי הפונקציות, ויוצרים מערכת משוואות מהצורה: $\lambda\cdot g_x=f_x$, $\lambda\cdot g_y=f_y$, $\lambda\cdot g_z=f_z$
2. מבודדים את λ משלושת המשוואות, משווים בין זוג המשוואות הראשונות ומבטאים את אחד המשתנים באמצעות המשתנה השני (לדוגמא: מבטאים את y במונחים של x),
3. משווים בין אחת המשוואות הראשונות והמשוואה האחרונה ומבטאים את המשתנה השלישי באמצעות אחד מהראשונים (לדוגמא: את z במונחים של x),
4. כאשר שלושת המשתנים מבוטאים כולם באמצעות משתנה אחד (לדוגמא x), מציבים במשוואת האילוץ וחושפים את ערכו של משתנה זה
5. חוזרים לביטויים שיצרנו בשלבים 2, ו-3, מציבים את המשתנה שחישבנו בשלב 4 (לדוגמא x) וחושפים את שני המשתנים האחרים (לדוגמא y ו-z)
6. במידה וקיבלנו 2 נקודות שונות, מציבים את שתיהן בפונקציית המטרה, התוצאה הגדולה תהיה המקסימום של הפונקציה תחת האילוץ הנתון והתוצאה הנמוכה תהיה המינימום.
במידה וקיבלנו תוצאה אחת בלבד, אפשר להניח שזו התוצאה המבוקשת בתרגיל.</td></tr>
</table>

פונקציות מרובות משתנים – דף נוסחאות למבחן

גבולות בפונקציה מרובת משתנים		
משימה	**שיטה**	**איך עושים?**
הוכחה	שיטה 1	מעבר לקואורדינטות פולריות: מבצעים החלפת משתנים לקואורדינטות פולריות ומחשבים את הגבול. ננסה להגיע למצב של מכפלה של איבר השואף לאפס ואיבר חסום – ואז נקבל שהגבול שואף לאפס. לרוב, כאשר $(x,y)\to(0,0)$ אז $r\to 0$ ואילו θ יכול להיות כל ערך, אבל בגלל ש-θ נמצא בתוך פונקציה טריגונומטרית, הפונקציה חסומה בין 1 למינוס 1 וכך מתקבלת מכפלה של איבר השואף ל-0 (r) ואיבר חסום.
	שיטה 2	משפט הסנדוויץ': מוצאים פונקציה אחרת $g(x,y)$ הגדולה מהפונקציה הנתונה $f(x,y)$ ופונקציה נוספת $h(x,y)$ הקטנה מערכה של הפונקציה הנתונה: $h(x,y)\le f(x,y)\le g(x,y)$ מראים כי הגבול של פונקציות המבחן ($g(x,y)$ ו-$h(x,y)$) קיים ושווה, ומסיקים כי גם הגבול של הפונקציה הנתונה קיים ושווה לגבול של פונקציות המבחן. לרוב, נמצא פונקציה הגדולה מערכה המוחלט של הפונקציה הנתונה וכך נוכל לקבוע את הפונקציה הקטנה מערכה המוחלט של הפונקציה להיות 0: $0\le\|f(x,y)\|\le g(x,y)$ ונָראה כי הגבול של g שווה 0.
הפרכה	שיטה 1	בוחרים שני מסלולים שונים העוברים בנקודה ובודקים את גבול הפונקציה בנקודה לאורך המסלולים – אם הגבולות יוצאים שונים, הרי שאין גבול לפונקציה בנקודה . (שימו לב: אם כל הגבולות, לאורך כל המסלולים שבדקנו שווים זה לזה – זה **<u>לא</u>** הוכחה שיש גבול לפונקציה בנקודה!!) דוגמאות למסלולים אפשריים: גבול לאורך המסלול $x=y$ יהיה: $\lim_{(x,x)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (בכל מקום שמופיע y מציבים x במקום), גבול לאורך המסלול $y=0$ יהיה: $\lim_{(x,0)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (בכל מקום שמופיע y מציבים 0 במקום), גבול לאורך המסלול $y=x^2$ יהיה: $\lim_{(x,x^2)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (בכל מקום שמופיע y מציבים x^2 במקום)
	שיטה 2	מסמנים את אחד המשתנים כמכפלה של קבוע כלשהו במשתנה השני, ומציבים בפונקציה המקורית, לדוגמא: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot\alpha x}{x^2+\alpha^2x^2}$ אם האיברים במנה מצטמצמים והקבוע נשאר – אין גבול (גם כאן, אם האיברים לא מצטמצמים זה **<u>לא</u>** סימן שיש גבול!)

תזכורת: מותר לבצע לופיטל רק על פונקציה של משתנה אחד!

פונקציות מרובות משתנים – דף נוסחאות למבחן

משימה	שיטה	איך עושים?
דיפרנציאביליות בפונקציה מרובת משתנים		
מה המשמעות של פונקציה דיפרנציאבילית? כשם שבפונקציה עם משתנה אחד הגדרנו פונקציה כ"גזירה" בנקודה מסוימת אם היה אפשר להעביר לה קו משיק בנקודה, כך בפונקציה עם שני משתנים, הפונקציה תיקרא "דיפרנציאבילית" בנקודה כלשהי אם אפשר להעביר בנקודה זו מישור משיק לפונקציה		
הוכחה	שיטה 1	פונקציה אלמנטרית - כאשר נתונה פונקציה פשוטה ומוכרת שמוגדרת בכל המרחב, או פונקציה פשוטה שמחוברת בפעולות אריתמטיות עם פונקציות פשוטות אחרות וידוע שהפונקציה מוגדרת בכל המרחב ללא בעיות מיוחדות - הרי שהפונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה
	שיטה 2	נגזרות חלקיות רציפות - אם קיימות לפונקציה נגזרות חלקיות בנקודה הנבדקת, והצלחנו להוכיח כי הנגזרות החלקיות **רציפות** בנקודה - הרי שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה
	שיטה 3	הוכחה באמצעות הגדרה - פונקציה תיקרא דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם קיימות $f_x(x_0,y_0)$ ו- $f_y(x_0,y_0)$ וניתן להציג את Δf באופן הבא: $\Delta f = f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y$ כאשר ε_2 ו ε_1 הן פונקציות של Δy ו Δx המקיימות $\varepsilon_1 \to 0$ ו- $\varepsilon_2 \to 0$ כאשר $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$
הפרכה	שיטה 1	תנאי הכרחי לדיפרנציאביליות הוא רציפות, תנאי הכרחי לרציפות היא קיימות של גבול, ולכן, אם נוכיח שלא קיים לפונקציה גבול בנקודה הנתונה, נוכיח שהיא לא רציפה בנקודה, ואז נוכיח שהיא לא דיפרנציאבילית
	שיטה 2	אם לא קיימת נגזרת חלקית כלשהי בנקודה, הרי שהפונקציה לא דיפרנציאבילית בנקודה
	שיטה 3	הפרכה באמצעות הגדרה - נניח בשלילה שהפונקציה דיפרנציאבילית, אם היא אכן דיפרנציאבילית, הרי שקיימות פונקציות ε_2 ו ε_1 המקיימות $\varepsilon_1 \to 0$ ו- $\varepsilon_2 \to 0$ כאשר $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$, כעת נבחר מסלול כלשהו ונראה שלאורכו הפונקציות לא שואפות לאפס

פונקציות מרובות משתנים – דף נוסחאות למבחן

נגזרות בפונקציה מרובת משתנים	
משימה	**איך עושים?**
נגזרות חלקיות	הנגזרת של הפונקציה $f(x,y)$ בכיוון המשתנים שלה (x ו-y): f_x , f_y – השיפוע של המשטח בכיוון המשתנה שלפיו גוזרים. איך עושים? גוזרים לפי משתנה אחד ומתייחסים למשתנה השני כקבוע. לגזירה בנקודה ספציפית אפשר להציב את הנקודה במשתנה השני, ולגזור רק לפי משתנה אחד. כאשר גוזרים את הנגזרת הראשונה, מקבלים את הנגזרת השניה של הפונקציה, אם גוזרים את f_x לפי x מקבלים את f_{xx}, אם גוזרים את f_y לפי y מקבלים את f_{yy}, אם גוזרים את f_x לפי y מקבלים את f_{xy}, ואם גוזרים את f_y לפי x מקבלים את f_{yx}. אם f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} רציפות בקבוצה פתוחה, הרי ש- $f_{xy} = f_{yx}$
נגזרות כיווניות	אם פונקציה ($f(x,y)$) דיפרנציאבילית בנקודה כלשהי $p(x_0,y_0)$, ונתון וקטור **יחידה** u בכיוון כלשהו (אשר רכיביו $\underline{u_1}$ ו-$\underline{u_2}$) (אם הוקטור u איננו וקטור יחידה, יש לנרמל אותו), אז הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בנקודה זו בכיוון הוקטור היא: $D_u f(x_0,y_0) = \nabla f \bullet \underline{u} = f_x \underline{u_1} + f_y \underline{u_2} = \left(f_x\ ,\ f_y\right) \bullet \left(\underline{u_1}\ ,\ \underline{u_2}\right)$
גרדיאנט	וקטור הנגזרות החלקיות הינו הוקטור שרכיב x שלו בכיוון הנגזרת החלקית של הפונקציה לפי x, רכיב y שלו בכיוון הנגזרת החלקית לפי y ואם יש לוקטור רכיב z אז הוא בכיוון הנגזרת החלקית לפי z. תכונות הגרדיאנט: 1. הגרדיאנט תמיד ניצב למשטח רמה (או לקו גובה בפונקציה עם שני משתנים) של הפונקציה. הגרדיאנט הוא הנורמל למשטח הרמה. 2. אם הגרדיאנט בנקודה מסוימת שווה אפס: $\nabla f(x_0,y_0) = 0$ אז כל הנגזרות המכוונות בנקודה שוות אפס. 3. אם הגרדיאנט בנקודה מסוימת שונה מאפס: $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ אז לנגזרת המכוונת בכיוון הגרדיאנט יש את הערך הגדול ביותר, וערכו $\lVert\nabla f(x_0,y_0)\rVert$ 4. אם הגרדיאנט בנקודה מסוימת שונה מאפס: $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$ אז לנגזרת המכוונת בכיוון הנגדי לכיוון הגרדיאנט יש את הערך הקטן ביותר, וערכו $-\lVert\nabla f(x_0,y_0)\rVert$

פונקציות מרובות משתנים – דף נוסחאות למבחן

<table>
<tr><th colspan="2">נגזרות בפונקציה מרובת משתנים</th></tr>
<tr><th>משימה</th><th>איך עושים?</th></tr>
<tr><td>נגזרת של פונקציה סתומה</td><td>כאשר נתונה פונקציה שהמשתנה המוסבר שלה (לדוגמא Z) מופיע כנעלם בתוך הפונקציה עצמה, וקשה או בלתי אפשרי לבודד אותו,
ואנו נדרשים לדוגמא לחשב את הנגזרת של Z לפי X (Z_x):
1. גוזרים את כל המשוואה לפי x. כיוון ש-Z הוא פונקציה של X, בכל מקום שמופיע Z נבצע גזירה כאשר את הביטוי Z נגזור כך: Z_x.
לדוגמא: $(e^{yz})_x = e^{yz} \cdot y \cdot Z_x$,
לדוגמא: $(\sin (yz))_x = \cos (yz) \cdot y \cdot Z_x$
2. מבודדים את Z_x ממשוואת הנגזרת וכך מגלים את הנגזרת של Z לפי X (Z_x).

אם נדרשים למצוא את ערכה של Z_x בנקודה נתונה (x_0, y_0, z_0):
3. מציבים את הנקודה במשוואת הנגזרת ומחשבים את הנדרש.

אם נתונים רק רכיבי x ו-y של הנקודה (x_0, y_0):
4. מציבים את הנקודה במשוואת הפונקציה, וחושפים את ערכו של Z בנקודה זו.</td></tr>
<tr><td>כלל השרשרת</td><td>בהינתן פונקציה $f(x,y)$ אשר המשתנים שלה תלויים במשתנים אחרים: $x(t,s)$ ו- $y(t,s)$, בכדי לגזור לדוגמא את f לפי t,
נוכל להשתמש בכלל: $f_t = f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$
לדוגמא, אם יש לנו פונקציה בשני משתנים: $f(x,y)$ אשר כל אחד מהמשתנים שלה הוא פונקציה בעצמו,
לדוגמא: $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{v}{w}$, נוכל להגדיר פונקציה חדשה, לדוגמא: $\varphi(u,v,w)$, ואם נרצה לגזור אותה לפי אחד מהמשתנים שלה, נעשה זאת כך:
נחפש היכן המשתנה שלפיו רוצים לגזור נמצא, בכל מקום שהוא מופיע, נצטרך לגזור את הפונקציה הראשית לפי הפונקציה שבה המשתנה מופיע ולכפול בנגזרת של הפונקציה הפנימית לפי המשתנה לפיו רוצים לגזור.
בדוגמא שלנו, אם נרצה לגזור את φ לפי u, נעשה זאת כך: $\varphi_u = f_x \cdot x_u$,
לעומת זאת, כאשר המשתנה מופיע בכמה מקומות, כמו לדוגמא המשתנה v נעשה זאת כך: $\varphi_v = f_x \cdot x_v + f_y \cdot y_v$</td></tr>
<tr><td>קירוב לינארי / דיפרנציאל שלם</td><td>אם נדרשים למצוא קירוב לערך של הפונקציה בנקודה $p(x_0, y_0)$: $z - z_0 = f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$</td></tr>
</table>

אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל	**נוסחה**	**משמעות כאשר האינטגרנד:** $\mathbf{f = 1}$	**משמעות כאשר האינטגרנד:** $\mathbf{f\,(x, y)}$
כפול	$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy$	שטח	נפח
משולש	$\iiint_V f(x,y,z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \int_{h(x,y)}^{p(x,y)} f(x,y)\, dz$	נפח	מסה

אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

איך פותרים אינטגרל כפול או משולש?

1. מחליטים האם האינטגרל קל / פתיר כפי שהוא או שיש צורך בהחלפת משתנים:

מתי נשתמש בהחלפת משתנים?

א. כאשר הביטוי באינטגרנד קשה או בלתי אפשרי לחישוב ואפשר להציג את המשתנים בתוכו כפונקציה של משתנים אחרים באופן שיָקֵל את תהליך החישוב,
ב. כאשר גבולות האינטגרציה מורכבים לחישוב ואפשר לבטא אותם כפונקציה של משתנים אחרים,

(ברוב התרגילים שדורשים החלפת משתנים, ההחלפה תועיל לנו גם בהפיכת האינטגרנד לפשוט יותר לחישוב, וגם בהפיכת הגבולות לפשוטים יותר, כך שכדאי תמיד להסתכל על שני הדברים האלו ולחפש את הרמזים להחלפה האידיאלית).

אם החלפנו משתנים, חייבים לכפול את האינטגרנד בערך המוחלט של היעקוביאן:

איך מוצאים את היעקוביאן?			
x ו-y מבוטאים במונחים של u ו-v :	u ו-v מבוטאים במונחים של x ו-y :	מעבר לקואורדינטות פולריות:	מעבר לקואורדינטות כדוריות:
$J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$	$J=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}^{-1}$	$J=r$	$J=r^2\sin(\varphi)$ (φ הינה הזווית מציר z החיובי)

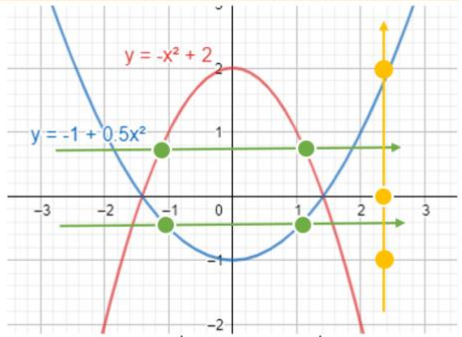
אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

2. בוחרים סדר אינטגרציה כאשר שמים לב לשלושת הדברים האלו:

א. היכולת לטגרל את האינטגרנד לפי המשתנים השונים. לדוגמא: האינטגרל $\int e^{x^2}\,dx$ לא פתיר, ולכן נהיה חייבים לנסות לבחור להתחיל לטגרל לפי משתנה אחר בתקווה שהביטוי הזה ייעלם.

ב. יש לוודא כי גבולות האינטגרל החיצוני ביותר (האחרון לטיגרול) הינו בעל גבולות קבועים (הגבולות של אינטגרלים פנימיים יכולים להיות פונקציה של אינטגרלים חיצוניים מהם).

ג. כדאי לנסות להגיע למצב שבו אנו מחשבים כמות מינימלית של אינטגרלים (יכול להיות שאם נבחר סדר אינטגרציה מסוים ניאלץ לחשב מספר אינטגרלים, ואם נבחר סדר אחר, יהיה עליו לחשב רק אינטגרל אחד) – שימו לב שלא תמיד אפשר לבחור בדרך הקצרה – זאת אומרת: לפעמים חייבים לחשב מספר אינטגרלים כי בסדר אינטגרציה שונה האינטגרל בכלל לא פתיר.

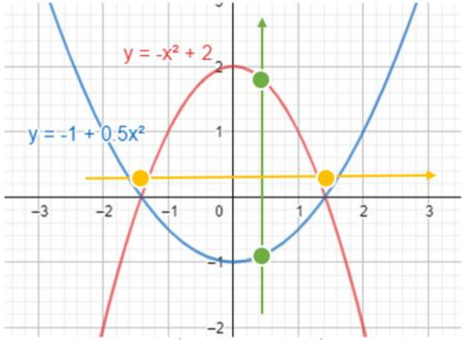


<u>סדר אינטגרציה</u>: קודם לפי x, אחר כך לפי y.

נקבל שני אינטגרלים כפולים ונצטרך לחבר את התוצאות. אחד עבור כניסה ויציאה בפרבולה המחייכת (מתחת לציר x), והשני עבור כניסה ויציאה בפרבולה הבוכה (מעל ציר x).

$$\int_{y=-1}^{y=0}\int_{x=-\sqrt{\frac{y+1}{0.5}}}^{x=\sqrt{\frac{y+1}{0.5}}} dxdy$$

$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{2-y}}^{x=\sqrt{2-y}} dxdy$$



<u>סדר אינטגרציה</u>: קודם לפי y, אחר כך לפי x.

נקבל אינטגרל כפול אחד. גבולות האינטגרל לפי y הינם: גבול תחתון – פרבולה מחייכת, גבול עליון – פרבולה בוכה. גבולות האינטגרל לפי x הינם נקודות המפגש בין הפרבולות, המתקבלות על ידי השוואה ביניהן:

$$2 - x^2 = 0.5x^2 - 1 \quad \rightarrow$$

$$1.5x^2 - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

האינטגרל המבוקש הינו: $\int_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}}\int_{y=0.5x^2-1}^{y=2-x^2} dydx$

אינטגרלים כפולים ומשולשים – דף נוסחאות למבחן

ברוב התרגילים, נקבל נפח הכלוא בתוך גליל וחסום מלמטה ומלמעלה בין שני משטחים, לרוב נוכל להטיל את הנפח על מישור כלשהו (ברוב המקרים על מישור xy), ואז נציג את המשטחים החוסמים את הנפח מלמעלה ומלמטה באופן כזה: $z = f(x,y)$,

אם נסמן את היטל הנפח על המישור ב-D, נקבל את האינטגרל:

$$\iint_D dxdy \int_{z=h(x,y)}^{z=f(x,y)} dz = \iint_D dxdy\, [f(x,y) - h(x,y)]$$

שזהו בעצם אינטגרל כפול. בשלב זה לרוב נבצע המרה לקואורדינטות פולריות: נחליף את המשתנים לפיהם מטגרלים, נחליף את גבולות האינטגרציה, נחליף את הביטויים שיש בתוך האינטגרנד לפי: $x = r\cos(\theta)\ ,\ y = r\sin(\theta)$,

ולא נשכח לכפול את האינטגרנד ביעקוביאן!

אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

<u>סוג האינטגרל</u>	**<u>משמעות כאשר האינטגרנד:</u>**		**<u>הצגה כללית</u>**
	$\mathbf{f=1}$	$\mathbf{f\,(x,y)}$	
כפול	שטח	נפח	$\iint_D f(x,y)\ dxdy$
משולש	נפח	מסה	$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$
קווי – סוג ראשון (f)	אורך	מסה	$\int_r f(x,y)\ ds$
משטחי – סוג ראשון (f)	שטח	מסה	$\iint_S f(x,y,z)\,ds$
קווי – סוג שני $(\underline{\mathbf{F}})$		עבודה (לאורך העקומה)	$\int_a^b F\left(\underset{(P)}{x},\underset{(Q)}{y},\underset{(R)}{z}\right)\bullet dr$
משטחי – סוג שני $(\underline{\mathbf{F}})$		שטף (על גבי / דרך המשטח)	$\iint_S \underline{F}\bullet\underline{n}\ ds$

פרמטריזציה	
קו ישר בין שתי נקודות: $P_1(x_1,y_1)$ ו- $P_2(x_2,y_2)$	$l(t)=\big((t\cdot x_2+(1-t)\cdot x_1)\ \ ,\ \ (t\cdot y_2+(1-t)\cdot y_1)\big) \quad \vert \quad 0\le t\le 1$
עקומה הנתונה כפונקציה: $y=f(x)$	אפשר להגדיר את המשתנה x להיות t, ואז הצגה פרמטרית של העקומה תהיה: $C(t)=(t\ \ ,\ \ f(t)) \quad \vert \quad a\le t\le b$
עקומה המונחת על עיגול / גליל / כדור	לרוב כדאי להציג את העקומה בקואורדינטות פולריות

אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

סימונים מקובלים	
פונקציית הצפיפות במרחב	$f(x,y,z)$
עקומה פרמטרית	$r(t)$ או $c(t)$
משטח בהצגה קרטזית	$S(x,y,z)$
משטח בהצגה פרמטרית	$\pi(s,t)$
היטל המשטח על אחד המישורים (לדוגמא מישור xy)	D

אינטגרל קווי – סוג ראשון		
עקומה $r(t)$	1. מציגים את העקומה בהצגה פרמטרית (כולל פענוח של נקודת ההתחלה ונקודת הסיום של העקומה, 2. גוזרים את העקומה לפי המשתנה שלה (לרוב לפי t), 3. מחשבים את הנורמה של הנגזרת של העקומה: $\lVert r'(t)\rVert = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ 4. אם פונקציית הצפיפות שונה מ-1, מחליפים את המשתנים שבפונקציית הצפיפות במשתנה הפרמטרי של העקומה, 5. מחשבים אינטגרל על המכפלה של פונקציית הצפיפות ונורמת הנגזרת	$\int_r f(x,y)\ ds = \int_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \lVert r'(t)\rVert dt$

אינטגרל קווי ומשטחי מסוג ראשון – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל משטחי – סוג ראשון		
משטח מפורש: $z = S(x,y)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy), 2. גוזרים את המשטח המפורש לפי המשתנים של המישור שעליו הטלנו (לרוב: z_x , z_y), 3. מחשבים את הביטוי: $\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}$ 4. מחליפים את המשתנה z שמופיע בפונקציית הצפיפות ב- $z = S(x,y)$ 5. מחשבים אינטגרל כפול על מכפלת פונקציית הצפיפות בביטוי: $\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}$, עם גבולות ההיטל.	$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{D_{x,y}} f(x,y,S(x,y)) \cdot \sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}\,dxdy$
משטח סתום: $C = S(x,y,z)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy), 2. מחשבים את הגראדיינט של המשטח הסתום ומחלקים בנגזרת לפי המשתנה שאותו הטלנו (לרוב הנגזרת לפי z), 3. מחשבים את הנורמה של המנה: $\left\|\frac{\nabla S}{S_z}\right\|$ 4. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה של פונקציית הצפיפות בביטוי: $\left\|\frac{\nabla S}{S_z}\right\|$, עם גבולות ההיטל. 5. אם בסוף התהליך נשארים עם המשתנה z מבודדים אותו מפונקציית המשטח, ולהציב אותו כפונקציה של x ו-y.	$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_{D_{x,y}} f(x,y,z) \cdot \left\|\frac{\nabla S}{S_z}\right\| dxdy$
משטח פרמטרי (בקואורדינטות פולריות): $\pi(r,\theta)$	1. מחשבים את גבולות המשתנים (זהו למעשה ה"היטל" של המשטח וישמש כתחום האינטגרציה), 2. גוזרים את המשטח לפי כל אחד מהמשתנים שלו, 3. מחשבים את הקרוס בין הנגזרות החלקיות של המשטח הפרמטרי: $\pi_s \times \pi_t$, 4. מחשבים את הנורמה של הקרוס: $\|\pi_s \times \pi_t\|$ (בפולרי: $\|\pi_r \times \pi_\theta\| = r$) (בכדורי: $\|\pi_r \times \pi_\theta\| = r^2 sin(\varphi)$) 5. מחליפים את המשתנים אשר בפונקציית הצפיפות בביטוי שלהם לפי המשתנים הפרמטריים, 6. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה של פונקציית הצפיפות והנורמה של קרוס הנגזרות החלקיות ($\|\pi_s \times \pi_t\|$)	$\iint_\pi f(x,y,z)\,d\pi = \iint_{D_{r,\theta}} f(rcos(\theta), rsin(\theta)) \cdot r\,drd\theta$
(בקואורדינטות כדוריות): $\pi(\varphi,\theta)$		$\iint_\pi f(x,y,z)\,d\pi = \iint_{D_{\varphi,\theta}} f(rsin(\varphi)cos(\theta), rsin(\varphi)sin(\theta), rcos(\varphi)) \cdot r^2 sin(\varphi))\,d\varphi d\theta$
משטח פרמטרי: $\pi(s,t)$		$\iint_\pi f(x,y,z)\,d\pi = \iint_{D_{s,t}} f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \cdot \|\pi_s \times \pi_t\|\,dsdt$

שדות וקטוריים – דף נוסחאות למבחן

שדה וקטורי - מילון	
שדה $\underline{F}(P,Q,R)$	שדה כוחות (לדוגמא: רוח, מים זורמים, כוח הכבידה...) – פונקציה וקטורית (במישור / במרחב) העושה עבודה (כוח כפול דרך) על גופים שונים במישור / מרחב
שדה משמר	שדה כוחות אשר העבודה שהוא עושה על גוף מנקודה לנקודה לא תלויה במסלול התנועה שבין הנקודות ולכן במסלול סגור העבודה שווה אפס
תחום פשוט קשר	תחום שכל לולאה בו יכולה להתכווץ לנקודה אחת באופן רציף. במילים אחרות: תחום ללא "חורים" – תחום רציף המוגדר בכל הנקודות שבתוכו

הסבר מילולי	**הגדרה מתמטית**	**הכלל תקף ב:**
אם מוצאים פוטנציאל** לפונקציה $\underline{F}$ - השדה משמר!!	$\underline{F}$ שדה משמר $\Leftrightarrow$ $\underline{F} = \nabla\phi$	כל תחום
בהינתן שדה במישור $\underline{F}(P,Q)$, אם הנגזרת של רכיב ה-y לפי x שונה מהנגזרת של רכיב ה-x לפי y – השדה **לא** משמר!	$\underline{F}$ שדה **לא** משמר $\Leftrightarrow$ $Q_x \neq P_y$	מרחב דו ממדי
בהינתן שדה במישור $\underline{F}(P,Q)$, אם הנגזרת של רכיב ה-y לפי x שווה לנגזרת של רכיב ה-x לפי y **והתחום פשוט קשר** – השדה משמר!	$\underline{F}$ שדה משמר $\Leftrightarrow$ $Q_x = P_y \mid D_{\text{פשוט קשר}}$	מרחב דו ממדי, תחום פשוט קשר!!
בהינתן שדה במרחב $\underline{F}(P,Q,R)$, אם הרוטר של השדה שווה אפס - השדה משמר. אם הרוטר שונה מאפס – השדה איננו משמר. $curl(\underline{F}) = \left((R_y - Q_z) \quad , \quad (P_z - R_x) \quad , \quad (Q_x - P_y)\right)$	$\underline{F}$ שדה משמר $\Leftrightarrow$ $curl(\underline{F}) = (0,0,0)$ $\underline{F}$ שדה **לא** משמר $\Leftrightarrow$ $curl(\underline{F}) \neq (0,0,0)$	מרחב תלת ממדי
בהינתן שדה משמר במישור $\underline{F}(P,Q)$, אזי העבודה שלו לאורך עקומה לא תלויה בצורת העקומה כי אם בנקודות ההתחלה $a(x_0,y_0)$ והסיום $b(x_1,y_1)$ ולכן אפשר לבחור כל צורה שתהיה נוחה יותר לחישוב, או לחילופין לחשב הפרש פוטנציאלים. אם העקומה סגורה העבודה לאורכה תהיה שווה 0.	$\int_a^b \underline{F}\,dr = \nabla\phi(b(x_1,y_1)) - \nabla\phi(a(x_0,y_0)) \quad , \quad \oint \underline{F}\,dr = 0$	

שדות וקטוריים – דף נוסחאות למבחן

	איך מוצאים פוטנציאל לשדה וקטורי במישור $\underline{F}(P(x,y,z)\,,Q(x,y,z))$?
1	מחשבים אינטגרל ל-P (רכיב ה-x של השדה) לפי x ומוסיפים קבוע התלוי ב-y $k(y)$: $\phi(x,y)=\int P\ dx+k(y)$
2	גוזרים את $\phi(x,y)$ (שמצאנו בשלב הקודם) לפי y (את הביטוי $k(y)$ גוזרים כך: $(k'(y)$
3	משווים את התוצאה ל-Q (רכיב ה-y של השדה) $\phi_y=Q(x,y)$ וחושפים את $k'(y)$
4	אם $k'(y)=0$, אין צורך להוסיף שום דבר ופונקציית הפוטנציאל היא הפונקציה שחישבנו בשלב 1, אם $k'(y)\neq 0$, מחשבים אינטגרל לפי y ל- $k'(y)$ ומוסיפים את התוצאה ל- $\phi(x,y)$ שמצאנו בשלב 1.
5	לסיום אפשר לבדוק את נכונות התוצאה על ידי גזירה של ϕ , פעם לפי x (בציפייה לקבל את רכיב P של השדה הנתון) ופעם לפי y (בציפייה לקבל את רכיב Q של השדה)

שדות וקטוריים – דף נוסחאות למבחן

	איך מוצאים פוטנציאל לשדה וקטורי במרחב $\underline{F}(P(x,y,z)\,,Q(x,y,z),R(x,y,z))$?
1	מחשבים אינטגרל ל-P (רכיב ה-x של השדה) לפי x ומוסיפים קבוע התלוי ב-y וב-z: $\phi(x,y,z)=\int P\ dx+k(y,z)$
2	גוזרים את $\phi(x,y,z)$ (שמצאנו בשלב הקודם) לפי y (את הביטוי $k(y,z)$ גוזרים כך: $(k'(y,z)$
3	משווים את התוצאה ל-Q (רכיב ה-y של השדה) $\phi_y=Q(x,y,z)$ וחושפים את $k'(y,z)$
4	אם $k'(y,z)=0$, אין צורך להוסיף שום דבר עבור y, ונוסיף לפוטנציאל שמצאנו בשלב 1 רק קבוע התלוי ב-z: $c(z)$ אם $k'(y,z)\neq 0$, מחשבים אינטגרל לפי y ל- $k'(y,z)$ ומוסיפים את התוצאה ל- $\phi(x,y,z)$ שמצאנו בשלב 1, וכן מוסיפים קבוע התלוי ב-z: $c(z)$.
5	גוזרים את $\phi(x,y,z)$ (שמצאנו בשלב הקודם) לפי z (את הביטוי $c(z)$ גוזרים כך: $(c'(z)$
6	משווים את התוצאה ל-R (רכיב ה-z של השדה) $\phi_z=R(x,y,z)$ וחושפים את $c'(z)$
7	אם $c'(z)=0$, אין צורך להוסיף שום דבר עבור z, ופונקציית הפוטנציאל היא הפונקציה שחישבנו בשלב הקודם, אם $c'(z)\neq 0$, מחשבים אינטגרל לפי z ל- $c'(z)$ ומוסיפים את התוצאה ל- $\phi(x,y,z)$ שמצאנו בשלב הקודם.
8	(לסיום אפשר לבדוק את נכונות התוצאה על ידי גזירה של ϕ , פעם לפי x (בציפייה לקבל את רכיב P של השדה הנתון), פעם לפי y (בציפייה לקבל את רכיב Q של השדה) ופעם לפי z (בציפייה לקבל את רכיב R של השדה).

שדות וקטוריים – דף נוסחאות למבחן

פוטנציאלים מפורסמים	
שדה	**פוטנציאל**
$\underline{F}\left(\frac{y}{x^2+y^2},\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$
$\underline{F}\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$	$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
$\underline{F}\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$	$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$
$\underline{F}\left(\frac{2x}{3(x^2+y^2)},\frac{2y}{3(x^2+y^2)}\right)$	$\frac{1}{3}\ln\left(x^2+y^2\right)$
$\underline{F}\left(\frac{x}{2(x^2+y^2)},\frac{y}{2(x^2+y^2)}\right)$	$\frac{1}{4}\ln\left(x^2+y^2\right)$
$\underline{F}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$	$\sqrt{x^2+y^2}$
$\underline{F}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)$	$\frac{x}{x^2+y^2}$
$\underline{F}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$	$\frac{y}{x^2+y^2}$
$\underline{F}\left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

סימונים מקובלים	
פונקציה וקטורית (שדה כוחות) במרחב	$\underline{F}(P,Q,R)$
עקומה פרמטרית	$c(t)$ או $r(t)$
משטח בהצגה קרטזית	$S(x,y,z)$
משטח בהצגה פרמטרית	$\pi(s,t)$
היטל המשטח על אחד המישורים (לדוגמא מישור xy)	D

אינטגרלים של sin ו-cos מ-0 ועד 2π	
$\int_0^{2\pi} \cos(x)\,dx = 0$	$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = 0$
$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$	$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$
$\int_0^{2\pi} \cos^3(x)\,dx = 0$	$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\,dx = 0$
$\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\pi$	$\int_0^{2\pi} \sin^4(x)\,dx = \frac{3}{4}\pi$

אינטגרלים של sin ו-cos	
$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$	$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$
$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx$	$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל קווי – סוג שני	
עקומה $r(t)$	1. מציגים את העקומה בהצגה פרמטרית (כולל פענוח של נקודת ההתחלה ונקודת הסיום של העקומה), 2. גוזרים את העקומה לפי המשתנה שלה (לרוב לפי t), 3. מחליפים את המשתנים שבפונקציית השדה במשתנה הפרמטרי של העקומה, 4. מחשבים אינטגרל על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה ווקטור הנגזרות של העקומה
	$\int_r \underline{F}\left(\underset{(P)}{x},\underset{(Q)}{y},\underset{(R)}{z}\right)\bullet dr = \int_a^b (P,Q,R)\bullet\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)dt = \int_a^b Pdx + Qdy + Rdz$

משפט גרין – אינטגרל קווי במישור על עקומה סגורה
בהינתן מסילה סגורה במישור (או כזו שאפשר לסגור בקלות), אשר חוסמת בתוכה שטח D, ואשר כיוונה **נגד** כיוון השעון (אחרת יש לכפול במינוס 1), העבודה של שדה לאורכה שווה לאינטגרל כפול עם גבולות השטח החסום בתוכה על הביטוי: $Q_x - P_y$. (במידה וסגרנו את התחום על ידי הוספת מסילה, יש להפחית את העבודה שהשדה עושה לאורכה!) $\oint_r \underline{F}\left(\underset{(P)}{x},\underset{(Q)}{y}\right)\bullet dr = \iint_{D_{x,y}} Q_x - P_y\,dxdy$
שימו לב שאפשר להשתמש במשפט גרין כדי לחשב שטח. כיצד? נגדיר שדה להיות: $\underline{F} = (0,x)$ או: $\underline{F} = (-y,0)$ בכדי שכאשר נחשב $Q_x - P_y$ נקבל 1, וכעת נוכל לחשב אינטגרל קווי עם השדה שהגדרנו והעקומה המקיפה את השטח אותו נרצה לחשב: $\iint_{D_{x,y}} Q_x - P_y\,dxdy = \oint_r \underline{F}\bullet dr$

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

אינטגרל משטחי – סוג שני		
משטח מפורש: $z = S(x,y)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy) 2. גוזרים את המשטח המפורש לפי המשתנים של המישור שעליו הטלנו (לרוב: z_x , z_y) 3. מחליפים את המשתנה z שמופיע בפונקציית השדה ב- $z = S(x,y)$ 4. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה והוקטור: $\pm(S_x , S_y , -1)$ (בהתאם לנתוני התרגיל יש לבחור את הכיוון החיובי או השלילי של הוקטור), על גבולות ההיטל	$\iint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iint_{D_{x,y}} \underline{F} \bullet \pm(S_x , S_y , -1) dxdy$
משטח סתום: $C = S(x,y,z)$	1. מטילים את המשטח המרחבי על גבי מישור כלשהו (לרוב על מישור xy) 2. מחשבים את הגראדיינט של המשטח הסתום ומחלקים בנגזרת לפי המשתנה שאותו הטלנו (לרוב הנגזרת לפי z) 3. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה והוקטור: $\pm \frac{\nabla G}{G_z}$ (בהתאם לנתוני התרגיל יש לבחור את הכיוון החיובי או השלילי של הוקטור) 4. אם בסוף התהליך נשארים עם המשתנה z אפשר לבודד אותו מפונקציית המשטח, ולהציג אותו כפונקציה של x ו-y)	$\iint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iint_{D_{x,y}} \underline{F} \bullet \pm \frac{\nabla G}{G_z} dxdy$
משטח פרמטרי: $\pi(s,t)$	1. מחשבים את גבולות המשתנים (זהו למעשה ה"היטל" של המשטח וישמש כתחום האינטגרציה) 2. גוזרים את המשטח לפי כל אחד מהמשתנים שלו 3. מחשבים את הקרוס בין הנגזרות החלקיות של המשטח הפרמטרי: $\pi_s \times \pi_t$ 4. מחליפים את המשתנים אשר בפונקציית השדה בביטוי שלהם לפי המשתנים הפרמטריים 5. מחשבים אינטגרל כפול על המכפלה הסקלרית של פונקציית השדה והוקטור: $(\pi_s \times \pi_t)$ עם גבולות המשתנים	$\iint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iint_{D_{s,t}} \underline{F} \bullet (\pi_s \times \pi_t) dsdt$

משפט גאוס (דיבירגנץ) – אינטגרל משטחי במרחב על משטח סגור
בהינתן משטח סגור S במרחב הכולא בתוכו נפח כלשהו V (או משטח שאפשר לסגור בקלות) אשר שדה הכוחות הנתון בתרגיל מוגדר בכל תחומו (גם המעטפת וגם הנפח): השטף של השדה על המשטח (כאשר הנורמל למשטח פונה החוצה! אם הוא פונה פנימה יש לכפול במינוס 1), שווה לאינטגרל משולש על דיברגנץ השדה עם גבולות הנפח הכלוא. במידה וסגרנו את הנפח על ידי הוספת משטח כלשהו, יש להפחית את השטף העובר דרך המשטח שהוספנו. $$\oiint_S \underline{F} \bullet \underline{n}\, ds = \iiint_V div(\underline{F})dxdydz$$
כיצד מחשבים את דיבירגנץ השדה?   נתונה פונקציה וקטורית: $\underline{F}(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,   הדיבירגנץ שלה הינו: $div(\underline{F}) = P_x + Q_y + R_z$ (התוצאה הינה סקלר)

אינטגרל קווי ואינטגרל משטחי – סוג שני – דף נוסחאות למבחן

משפט סטוקס (רוטור) – אינטגרל קווי במרחב על עקומה סגורה
בהינתן משטח כלשהו במרחב π אשר שפתו הינה עקומה (סגורה) r: העבודה של פונקציה ווקטורית $\underline{F}$ לאורך העקומה שווה לשטף של ה-curl של השדה $\underline{F}$ מוכפל בנורמל המשטח (חישוב כאינטגרל משטחי סוג ראשון – שהרי המכפלה הסקלרית $\mathrm{curl}(F) \cdot n$ הופכת לפונקציה סקלרית) (כיוון הנורמל לפי כלל יד ימין – אצבע לכיוון העקומה, אמה לכיוון המשטח, אגודל לכיוון הנורמל). אם אחד המשתנים במשוואת העקומה שווה ל-0 (לדוגמא אם העקומה מונחת על מישור xy, אז z=0) אפשר להפוך את המשתנה הזה ל-0 גם בפונקציה הוקטורית. $$\oint_r \underline{F} \bullet dr = \iint_\pi curl(\underline{F}) \bullet \underline{n}\, ds$$
כיצד מחשבים את הרוטור של השדה? נתונה פונקציה וקטורית: $\underline{F}(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, הרוטור שלה הינו: $curl(\underline{F}) = \left((R_y - Q_z)\ ,\ (P_z - R_x)\ ,\ (Q_x - P_y)\right)$ (התוצאה וקטור) (כאשר השדה משמר, כל רכיבי הרוטור חייבים לצאת 0!)

משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

תרשים סדר הפעולות לביצוע

האם המשוואה הומוגנית?

כן

$y'' + py' + qy = 0$

כותבים משוואה אופיינית:

$m^2 + pm + q = 0$

ומוצאים את השורשים שלה

מוצאים פתרון כללי: $y_H = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

משוואה הומוגנית

לא

$y'' + py' + qy = r(x)$

משווים את המשוואה ל- 0 ופותרים כמו משוואה הומוגנית

משוואה לא הומוגנית

מוצאים את הפתרון הפרטי לפי $r(x)$:

$y_P = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x)$

גוזרים את הפתרון הפרטי לפי סדר המד"ר, מציבים במד"ר ומגלים את A_1 ואת A_2 באמצעות השוואת מקדמים או העברת אגפים.

(דוגמא להשוואת מקדמים: אם הגענו למשוואה: $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 = 5 + 3x^2$ נשווה בין המקדמים באגף ימין לנעלמים באגף שמאל ונקבל: $A_0 = 5$, $A_1 = 0$, $A_2 = 3$).

מחברים את הפתרון ההומוגני והפתרון האי-הומוגני: $y = y_H + y_p$

אם נתון תנאי התחלה, גוזרים את הפתרון לפי תנאי ההתחלה ומגלים את C_1 ואת C_2

משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

עבור משוואה הומוגנית מהצורה ($y'' + py' + qy = 0$), מתאימים משוואה אופיינית: $m^2 + pm + q = 0$, מחשבים את שורשי המשוואה האופיינית ומוצאים את הפתרון ההומוגני הכללי לפי הטבלה:

שורשים	הפתרון הכללי
$m_1 \neq m_2$ (ממשיים)	$y_H = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{m_2 \cdot x}$
$m_1 = m_2$ (ממשיים)	$y_H = C_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{m_1 \cdot x}$
$m_{1,2} = a \pm b_i$ (מרוכבים) (a – ממשי, b – מדומה)	$y_H = C_1 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \cos(bx) + C_2 \cdot e^{a \cdot x} \cdot \sin(bx)$

כאשר נתונים תנאי התחלה, גוזרים את הפתרון הכללי לפי תנאי ההתחלה, מציבים את התנאים ומגלים את C_1 ו- C_2

כאשר $r(x)$ הוא פולינום, הפתרון הפרטי למד"ר יהיה לפי הטבלה:

$\boldsymbol{r(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n}$ (פולינום)	
שורשים	**הניחוש**
$m_1, m_2 \neq 0$	$y_P = A_0 + A_1 \cdot x + \cdots + A_n \cdot x^n$
$m_1 \neq m_2 = 0$	$y_P = x(A_0 + A_1 \cdot x + \cdots + A_n \cdot x^n)$
$m_1 = m_2 = 0$	$y_P = x^2(A_0 + A_1 \cdot x + \cdots + A_n \cdot x^n)$

יש לשים לב כי כמות הנעלמים המחוברים היא לפי החזקה הגבוהה ביותר,

לדוגמא כאשר: $\boldsymbol{r(x) = x^3}$ הניחוש יהיה: $y_P = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 \cdot x^3$

משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

כאשר $r(x)$ הוא פונקציה מעריכית, הפתרון הפרטי למד"ר יהיה לפי הטבלה:

$\boldsymbol{r(x) = ke^{a\cdot x}}$		
שורשים	a	**הניחוש**
m_1, m_2	$a \neq m_1, m_2$	$y_P = A \cdot e^{a\cdot x}$
$m_1 \neq m_2$	$a = m_2$ או $a = m_1$	$y_P = A \cdot x \cdot e^{a\cdot x}$
$m_1 = m_2$	$a = m_1 = m_2$	$y_P = A \cdot x^2 \cdot e^{a\cdot x}$

כאשר $r(x)$ הוא פונקציה טריגונומטרית, הפתרון הפרטי למד"ר יהיה:

$\boldsymbol{r(x) = A \cdot \sin(ax)}$ או $\boldsymbol{r(x) = A \cdot \cos(ax)}$ (טריגו)		
הניחוש הבסיסי הינו:	$y_P = A_1 \cdot \sin(ax) + A_2 \cdot \cos(ax)$	יש לשים לב כי A_1 ו-A_2 הם קבועים שיש לגלות בהמשך, ולא המקדמים שיש במד"ר המקורית. הפתרון הפרטי כולל תמיד גם את sin וגם את cos ובשניהם x מוכפל במקדם a
אם אחד או יותר מהמחוברים בפתרון ההומוגני הוא ביטוי טריגונומטרי המופיע בפתרון הפרטי, נכפול את הניחוש במעלה הנמוכה ביותר של x שתניב לנו פונקציה שאין בה שום מחובר שהוא פתרון של המשוואה ההומוגנית	$y_P = x \cdot (A_1 \cdot \sin(ax) + A_2 \cdot \cos(ax))$	יש לשים לב כי אם בפתרון ההומוגני מופיע לדוגמא: $\sin(x)$ ואילו בפתרון הפרטי מופיע $\sin(2x)$, אין צורך לכפול את הפתרון ב-x
כאשר ב- $r(x)$ מופיעים ביטויים שונים זה מזה, לדוגמא: $a \neq b$ | $cos(ax) + sin(bx)$ או לדוגמא: $cos^2(x) + sin(x)$ יש למצוא זהויות מתאימות בכדי להפוך את הביטויים לדומים זה לזה.		

כאשר $r(x)$ מכיל כמה מחוברים שכל אחד מהם הוא סוג שונה של פונקציה (פולינום / מעריכית / טריגונומטרית), מוצאים פתרון פרטי לכל מחובר לחוד ומחברים את כל הפתרונות הפרטיים יחד עם הפתרון ההומוגני.

משוואות דיפרנציאליות – דף נוסחאות

כאשר מתבקשים למצוא פולינום מקלורן מסדר כלשהו לפתרון של בעיית ההתחלה, פותרים את הבעיה כרגיל ובסוף מוצאים פיתוח לכל אחד מהמחוברים שבפתרון, ומחברים את הפיתוחים יחד. לרוב אפשר להשתמש בפיתוחים ידועים (אם נדרש עד סדר כלשהו ואין את החזקה הזו בפיתוח, מחשבים עד חזקה אחת פחות):

	טור	פיתוח	תחום ההתכנסות
נוסחה כללית	פולינום מקלורן ($x_0 = 0$)	$p(x)_n = f(x_0) + \frac{f(x_0)' \cdot x^1}{1!} + \frac{f(x_0)'' \cdot x^2}{2!} + \frac{f(x_0)''' \cdot x^3}{3!} + \dots + \frac{f(x_0)^{(n)} \cdot x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_0)^{(k)} \cdot x^k}{k!}$	
	פולינום טיילור	$p(x)_n = f(x_0) + \frac{f(x_0)' \cdot (x-x_0)^1}{1!} + \frac{f(x_0)'' \cdot (x-x_0)^2}{2!} + \frac{f(x_0)''' \cdot (x-x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{f(x_0)^{(n)} \cdot (x-x_0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_0)^{(k)} \cdot (x-x_0)^k}{k!}$	
פיתוחים ידועים	$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$-1 < x < 1$
	e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
	e^{-x}	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(-1)^k = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$	$-\infty < x < \infty$
	$\sin(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
	$\cos(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < \infty$
	$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}(-1)^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x \le 1$
	$tan^{-1}(x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}(-1)^k = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$	$-1 \le x \le 1$